

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

par

Daniel HAUDEN

— * — * —

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS NON LINÉAIRES
DES ONDES ELASTIQUES DE SURFACE :
APPLICATIONS AUX OSCILLATEURS
ET CAPTEURS A QUARTZ

— * — * —

Soutenue le 12 juin 1979, devant la Commission d'Examen :

MM P.GRIVET
 JJ.GAGNEPAIN
 B.A.AULD
 M.MORIAMEZ
 E.DIEULESAINT
 JG.THEOBALD
 R.BESSON

Président
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546609_0003

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

par

Daniel HAUDEN

— * — * —

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS NON LINÉAIRES
DES ONDES ELASTIQUES DE SURFACE :
APPLICATIONS AUX OSCILLATEURS
ET CAPTEURS A QUARTZ

— * — * —

Soutenue le 12 juin 1979, devant la Commission d'Examen :

MM P.GRIVET
JJ.GAGNEPAIN
B.A.AULD
M. MORIAMEZ
E. DIEULESANT
JG.THEOBALD
R.BESSON

Président
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur

THÈSE

Présentée

À LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRAISCHES-DOITÉ

Pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES

DE



Le 15 juin 1975

ETUDE DES PROPRIÉTÉS NON LINÉAIRES

DES ONDES ELASTIQUES DE SURFACE :

APPLICATIONS AUX OSCILLATIONS

ET CAPTEURS A QUANTS

Par

Enthousiasme le 15 juin 1975 devant la Commission d'Examen

Président
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur

Président
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur

UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE - BESANÇON

Président : Monsieur LÉVÊQUE Pierre

FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

Mr GALATRY Louis
Professeur

: Physique Moléculaire

DOYENS HONORAIRES

Mrs GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET,
THIEBAUT, BERNARD

ASSESSEURS

Mr BLAISON Jean
Maître-Assistant

: Géologie-Minéralogie

PROFESSEURS HONORAIRES

Mrs THIRY, TRILLAT, UEBERSFELD,
VINCENSINI, TRONCHET, THEOBALD N.,
QUANTIN, BENNETON, CHATELET.

PROFESSEURS

Mrs LHOTE François : Chronométrie
PERROT Roger : Chimie Générale
PLUVINAGE Philippe : Physique Théorique
CHALEAT Raymond : Mécanique Appliquée
BERNARD Jean : Chimie-Physique
RIPPLINGER Jean : Physiologie Animale
GREMILLARD Jean : Mathématiques
VIENOT Jean-Charles : Physique Gle Optique
THIEBAUT Jean : Pétrographie-Minéralogie
GOMOT Lucien : Zoologie et Embryologie
THEOBALD J-Gérard : Spectroscopie Hertzienne
CERUTTI Ernest : Chimie Appliquée
DEVIN Claude : Chimie 1er cycle
CAPODANNO Pierre : Mécanique Théorique
BANTEGNIE Robert : Mathématiques
ROBERT Daniel : Physique Moléculaire
ROBERT Jacques : Mathématiques I
CHAUVE Pierre : Géologie-Minéralogie
RANGHEARD Yves : Géologie
BIDAULT Michel : Taxonomie Expérimentale
GRAS Georges : Mathématiques

MAITRE DE CONFERENCES HONORAIRES

Mr GRANIER

MAITRES DE CONFERENCES

Mrs WEIL Michel : Mathématiques
BROQUET Paul : Géologie
TREHEL Michel : Informatique
MILLET Bernard : Botanique
BENILAN Philippe : Mathématiques
COUGNARD Jean : Mathématiques
BRUCKERP Sylvain : Ecologie Végétale
LALLEMENT G. : Mécanique Appliquée
LESAINTE Pierre : Mathématiques I
MOREELS Guy : Astronomie

RESPONSABLE DES SERVICES ADMINISTRATIFS

Mr RUNGE Jean-Marie

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mrs POTIER Robert : Physique des Solides
REAL Pierre : Ecologie Animale
GOUARNE René : Mathématiques
MERIGOUX Henri : Cristallographie et
Synthèses minérales
OLIVIER Marcel : Electronique Quantique
MONTAGNER Hubert : Psychophysiologie
BULABOIS Jean : Physique Gle-Optique
GAUDEMER Yves : Biochimie
LAUDE Bernard : Chimie Organique
MIELLOU Jean-Claude : Analyse Numérique
ROBERT Guy : Electrochimie
DUBOUCHET Jacques : Botanique



A mon fils Jérôme

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs du Centre National de la Recherche Scientifique avec l'autorisation de Monsieur le Directeur Général du Centre National de la Recherche Scientifique que je tiens à remercier.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait Monsieur le Professeur GRIVET, Directeur de l'Institut d'Electronique Fondamentale, Membre de l'Institut, en consacrant une partie de son temps à l'examen de ce travail et en acceptant la Présidence du Jury.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur AULD, Professeur à l'Université de Stanford (Californie), pour l'intérêt qu'il a toujours manifesté à ce travail et je lui suis très reconnaissant d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Je suis très honoré de l'intérêt que Monsieur MORIAEZ, Professeur à l'Université de Valenciennes, porte à mon travail en acceptant d'en être rapporteur.

Je voudrais dire à Monsieur THEOBALD, Professeur à la Faculté des Sciences et des Techniques de Besançon, combien je lui sais gré d'avoir bien voulu accepter d'examiner mon travail.

Toute ma gratitude va à Monsieur DIEULESAINT, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, qui a bien voulu accepter amicalement de se libérer de ses nombreuses occupations pour consacrer une partie de son temps à l'examen de mon mémoire et faire partie du Jury.

J'exprime mes remerciements à Monsieur BESSON, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et des Techniques de Besançon, pour l'honneur qu'il me fait en faisant partie du Jury.

Je voudrais remercier Monsieur le Professeur UEBERSFELD, Vice-Président de l'Université Pierre et Marie Curie, qui a dirigé ma thèse de 3e cycle et qui m'a proposé le sujet de ce travail lors de la nouvelle orientation du Laboratoire.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur GAGNEPAIN, Directeur du Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs, qui, par son concours personnel et ses conseils tant judicieux qu'amicaux, m'a considérablement aidé à mener à bien ce travail.

Je n'aurai garde d'oublier l'aide permanente et efficace qui m'a été apportée par l'ensemble du personnel du Laboratoire, chercheurs, ingénieurs et techniciens, électroniciens et mécaniciens. Je voudrais souligner plus particulièrement le rôle décisif qu'a joué Monsieur COQUEREL, Ingénieur au Laboratoire, dans la mise au point de la technologie des dispositifs à onde de surface et sans qui ce travail n'aurait pas eu de concrétisation pratique.

Je tiens à remercier les collaborateurs de la Société Quartz et Electronique et tout particulièrement Messieurs DUPONT, Directeur Général, TOULEMONT, Directeur et PEGEOT, Ingénieur de Recherche, pour l'aide matérielle et les conseils qu'ils m'ont apportés.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de ce mémoire, en particulier Monsieur MARIANNEAU et Madame HISLEUR qui s'est acquittée avec compétence et amitié de la tâche difficile de dactylographie.

S O M M A I R E

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE I - ONDES DE SURFACE - PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES EN RÉGIME LINÉAIRE</u>	
I-1 - DIFFERENTS TYPES D'ONDES DE SURFACE	6
I-1-1 - Ondes de RAYLEIGH	6
I-1-2 - Ondes de BLEUSTEIN-GULYAEV	7
I-1-3 - Ondes de LAMB	8
I-1-4 - Ondes de STONELEY	8
I-1-5 - Ondes de LOVE	9
I-1-6 - Ondes se propageant le long d'une surface corruguée	9
I-2 - EQUATIONS D'EQUILIBRE ET D'ETAT DANS L'APPROXIMATION LINEAIRE	10
I-2-1 - Déformations	10
I-2-2 - Contraintes	11
I-2-3 - Relation efforts-déformations	12
I-2-4 - Equations de conservation	13
I-3 - CALCUL DES CARACTERISTIQUES DES ONDES DE RAYLEIGH	14
I-3-1 - Paramètres angulaires du substrat	15
I-3-2 - Cas d'un solide purement élastique	17
I-3-3 - Cas d'un solide piézoélectrique	20
I-3-4 - Flux d'énergie	24
I-3-5 - Couplage électromécanique	26
I-4 - METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE	
I-4-1 - Programme de calcul	28
I-4-2 - Ondes de RAYLEIGH sur un substrat de quartz	29
I-4-3 - Quelques résultats théoriques	35

I-5 - ETUDE EXPERIMENTALE DE LIGNES A RETARD A ONDE DE RAYLEIGH	37
I-5-1 - Réalisation des lignes	38
I-5-2 - Mesure des paramètres électriques	41
I-5-3 - Résultats et comparaison avec la théorie	43

CHAPITRE II - PROPAGATION D'UNE ONDE DE SURFACE EN RÉGIME NON LINÉAIRE

II-1 - RAPPEL DES EQUATIONS GENERALES NON LINEAIRES	50
II-1-1 - Déplacements	50
II-1-2 - Déformations	50
II-1-3 - Efforts	51
II-1-4 - Equations d'équilibre	53
II-2 - PROPAGATION DANS UN MILIEU PREDEFORME	57
II-2-1 - Définitions	57
II-2-2 - Equations d'équilibre	59
II-2-3 - Linéarisation des coefficients élastiques modifiés	62
II-3 - METHODE VARIATIONNELLE	64
II-3-1 - Déformations statiques homogènes	64
II-3-2 - Modification polynomiale des caractéristiques du milieu	66
II-4 - RESOLUTION PAR METHODE DE PERTURBATION	68
II-4-1 - Equations d'équilibre et conditions initiales	69
II-4-2 - Variation relative de vitesse de l'onde	70
II-4-3 - Cas des ondes de RAYLEIGH	72

CHAPITRE III - EFFETS THERMIQUES

III-1 - CALCUL DES COEFFICIENTS DE TEMPERATURE STATIQUES	81
III-1-1 - Méthode de régression polynomiale	82
III-1-2 - Méthode variationnelle	84
III-1-3 - Coefficients de température du quartz	86
<i>Comparaison entre les deux méthodes de calcul</i>	89
<i>Lieux des coupes où $\alpha_f^{(1)}$, $\alpha_f^{(2)}$ et $\alpha_f^{(3)}$ sont nuls</i>	93

III-2 - ETUDE EXPERIMENTALE	114
III-2-1 - Méthodes de mesure	115
<i>Oscillateur à ligne à retard</i>	115
<i>Oscillateur asservi en phase sur la ligne</i>	116
<i>Mesure de la caractéristique fréquence-température</i>	117
<i>Coefficients de température expérimentaux</i>	119
III-2-2 - Résultats et applications	119
<i>Coupes à faibles coefficients de température</i>	119
<i>Coupe linéaire en température</i>	123

CHAPITRE IV - INFLUENCE DES PERTURBATIONS D'ORIGINE MÉCANIQUE

IV-1 - VARIATION DE VITESSE DES ONDES DE RAYLEIGH DANS LE CAS DU QUARTZ PRECONSTRAINT	129
IV-1-1 - Organigramme du calcul	129
IV-1-2 - Calcul des prédéformations	131
IV-2 - ETUDE EXPERIMENTALE	135
IV-2-1 - Dispositif expérimental	135
IV-2-2 - Forces de flexion	136
IV-2-3 - Forces de compression	142
IV-2-4 - Compression radiale d'une plaque circulaire	146
IV-2-5 - Sensibilité aux accélérations	150

<u>CONCLUSION</u>	155
-------------------	-----

ANNEXES

RÉFÉRENCES

LIVRES TRAITANT DU SUJET

INTRODUCTION

-o0o-

Bien que les ondes de surface aient été étudiées dès 1885 par LORD RAYLEIGH dans le cas d'un milieu isotrope (1) - il s'agissait de la propagation d'une onde sismique - ce n'est que vers 1968 que les propriétés de ces ondes ont été utilisées pour le traitement du signal dans des dispositifs électro-acoustiques. La mise au point par WHITE (2) du transducteur métallique à électrodes interdigitées permit d'utiliser des cristaux piézoélectriques comme substrat de propagation.

Dans un premier temps, seules les caractéristiques de fonctionnement en régime linéaire furent étudiées. Dans ce cas, l'onde est décrite par sa vitesse de phase, la direction de son flux d'énergie, les composantes de l'amplitude de vibration et le coefficient de couplage électromécanique. L'utilisation des techniques de dépôt sous vide de couches minces conduisit à la réalisation d'un premier dispositif : la ligne à retard, dont l'application au filtrage paraissait immédiate. Cependant, il s'est avéré rapidement nécessaire de déterminer des configurations (coupe cristalline et direction de propagation) peu sensibles aux effets de la température. Ainsi, par transpositions de ce qui avait été fait en ondes de volume, une exploration de coupes à simple rotation (par rapport à Ox_1) conduisit à la coupe ST, coupe qui présente un coefficient de température du premier ordre nul au voisinage de la température ambiante (dans ce cas, la propagation se fait suivant Ox_1). Jusqu'à ce jour, cette coupe est celle qui a présenté les meilleures caractéristiques et est donc employée par tous les utilisateurs de dispositifs à onde de surface.

Cependant, les caractéristiques thermiques sont loin d'être satisfaisantes, car le coefficient de température du deuxième ordre est trop important et donc la fréquence suit une loi de variation quadratique en fonction de la température.

De plus, les ondes de surface, comme tout dispositif acoustique, sont sensibles à l'influence de perturbations d'origine mécanique. Ces perturbations affectent les propriétés de l'onde en raison de non-linéarités que présente le cristal. Ces effets non linéaires ont été peu étudiés dans le cas des ondes de surface en raison de la complexité de structure de ces dernières, et sont assurément bien moins connus que pour les ondes de volume.

Actuellement, l'amélioration des performances des dispositifs électroacoustiques nécessite une description générale et complète des propriétés thermiques et non linéaires. L'étude de ces mécanismes est l'objet du présent travail, qui a été effectué dans le cadre du Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs et souvent en collaboration avec d'autres organismes de recherche et industries.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres.

Dans le premier, est présentée une étude générale de la caractérisation des ondes de surface lorsqu'elles se propagent sur un milieu semi-infini, linéaire et non perturbé, piézoélectrique ou non.

La résolution des équations de propagation dans ces conditions idéales, permet d'obtenir, pour tout matériau cristallin, la vitesse de phase, l'amplitude, les coefficients de pénétration et la direction du flux d'énergie de l'onde pour une coupe cristalline et une direction de propagation quelconques.

Ces résultats préliminaires sont indispensables pour la suite de l'étude et plus particulièrement les propriétés non linéaires. Parallèlement, ont été développés au Laboratoire les moyens technologiques nécessaires à la préparation des lignes à retard.

Le second chapitre est consacré à l'étude de la propagation de l'onde de surface en milieu perturbé et inhomogène. Après avoir rappelé les principes

généraux de l'élasticité non linéaire, nous présentons les différentes méthodes de résolution qui seront utilisées dans le cas où le solide est soumis à une prédéformation inhomogène dans l'épaisseur du matériau.

Les chapitres suivants sont consacrés aux applications les plus importantes.

Dans le chapitre III, une méthode variationnelle est utilisée pour calculer les coefficients de température des premier, second et troisième ordre de la vitesse et de la fréquence de l'onde. Les résultats obtenus à l'aide d'un programme de calcul original sont appliqués à la recherche de coupes cristallines à double rotation, présentant des propriétés thermiques statiques optimales dans le cas du quartz : soit une faible sensibilité à la température pour les oscillateurs stables, soit au contraire une grande sensibilité associée à une bonne linéarité pour les thermomètres.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des instabilités de fréquence d'origine mécanique. On montre dans ce cas qu'elles résultent du couplage non linéaire entre onde et prédéformation qui est dû principalement aux coefficients élastiques non linéaires d'ordre supérieur. La méthode de perturbation élaborée dans le second chapitre est appliquée à l'étude de l'influence de forces extérieures (de flexion ou de compression) et au calcul de la sensibilité aux accélérations. L'étude n'est pas limitée aux seuls effets de surface, mais prend en compte les phénomènes dans toute l'épaisseur du substrat.

Dans l'étude des propriétés non linéaires et dans celle des effets thermiques, des solutions sont proposées par l'utilisation de coupes à double rotation. Deux aspects complémentaires sont toujours présents : minimiser la sensibilité en vue d'améliorer la stabilité des dispositifs à onde de surface (il s'agit principalement d'oscillateurs) ou au contraire l'augmenter et l'utiliser pour mesurer, de façon sélective, une grandeur physique déterminée - on parlera alors de capteurs.

CHAPITRE I

ONDES DE SURFACE

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES EN RÉGIME LINÉAIRE

-o0o-

Après un bref rappel des divers types d'ondes de surface et des notions de base de l'élasticité linéaire, l'essentiel de ce chapitre est consacré au calcul théorique des propriétés des ondes élastiques de Rayleigh se propageant sur un substrat homogène piézoélectrique ou non. Un programme de calcul numérique est élaboré à partir des expressions théoriques générales. Il donne pour toute orientation du substrat et toute direction de l'espace la vitesse de propagation de l'onde, son amplitude, son atténuation à l'intérieur du cristal et la direction du flux d'énergie. Ce programme est appliqué au cristal de quartz.

Un certain nombre de vérifications expérimentales a été effectué en réalisant des lignes à retard d'orientation et de direction variées définies suivant des prévisions théoriques. Dans ce but, les moyens technologiques nécessaires ont été mis au point.

I-1 - DIFFERENTS TYPES D'ONDES DE SURFACE

Selon la nature du milieu et les conditions de leur propagation, différents types d'ondes élastiques peuvent se propager à la surface d'un substrat. Ces diverses ondes élastiques sont appelées "Ondes de surface" parce qu'elles n'ébranlent qu'une faible épaisseur de matière, en général quelques longueurs d'ondes acoustiques.

I-1-1 - ONDES DE RAYLEIGH

Elles se propagent à la surface de tout milieu isotrope ou anisotrope semi infini (1), (2), (3), (4).

Sur un milieu isotrope, le déplacement de l'onde de RAYLEIGH se fait dans le plan défini par la direction de propagation et la normale à la surface du substrat, appelé plan sagittal. Elle a par conséquent une composante normale et une composante longitudinale. Le vecteur polarisation décrit une ellipse dans le sens rétrograde.

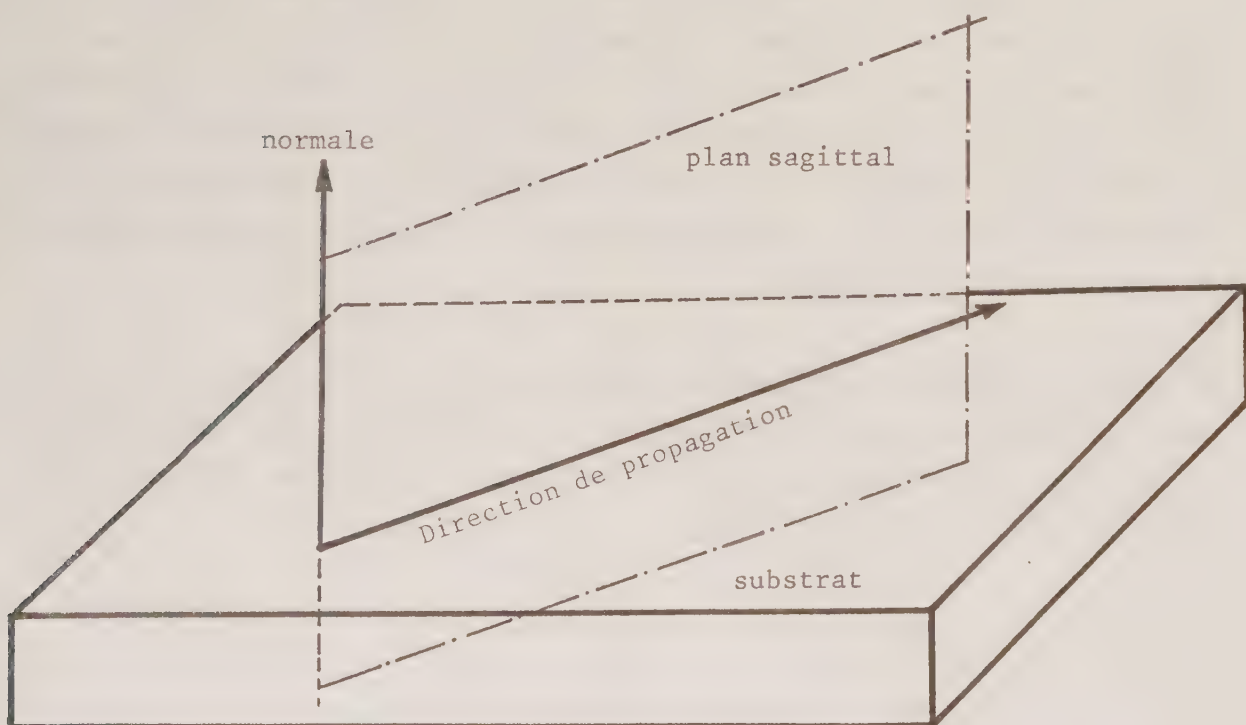


Fig. 1

Lorsqu'elles se propagent sur des milieux anisotropes, qu'ils soient piézo-électriques ou non, les ondes de RAYLEIGH ont généralement trois composantes dont l'une est perpendiculaire à la direction de propagation dans le plan sagittal, la seconde est colinéaire à la direction de propagation et la dernière, perpendiculaire à la direction de propagation, se déplace parallèlement à la surface du substrat.

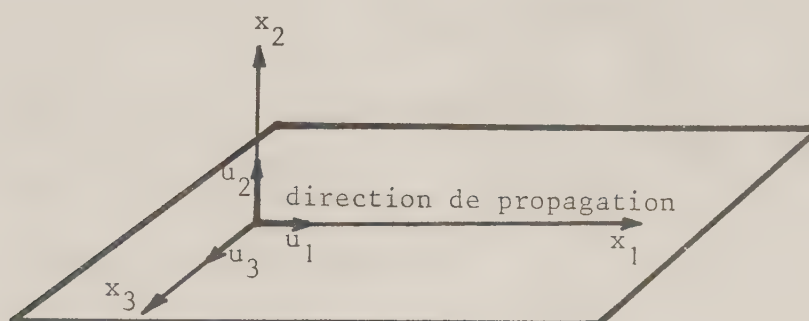


Fig. 2

Quel que soit le milieu de propagation, le déplacement s'annule rapidement à l'intérieur du matériau (environ deux longueurs d'onde sous la surface).

Toutes les composantes de l'onde se déplacent avec la même vitesse de propagation (si l'on fait une comparaison avec les ondes de volume, il s'agit donc d'un cas de dégénérescence). L'onde de RAYLEIGH est non dispersive car sa vitesse ne dépend pas de la fréquence de la vibration.

Ces ondes sont actuellement très utilisées car elles peuvent être facilement engendrées et détectées après propagation.

1-1-2 - ONDES DE BLEUSTEIN-GULYAEV

Elles ne se propagent qu'à la surface d'un matériau fortement piézo-électrique (3).

C'est l'effet piézoélectrique qui retient l'onde à la surface du matériau.

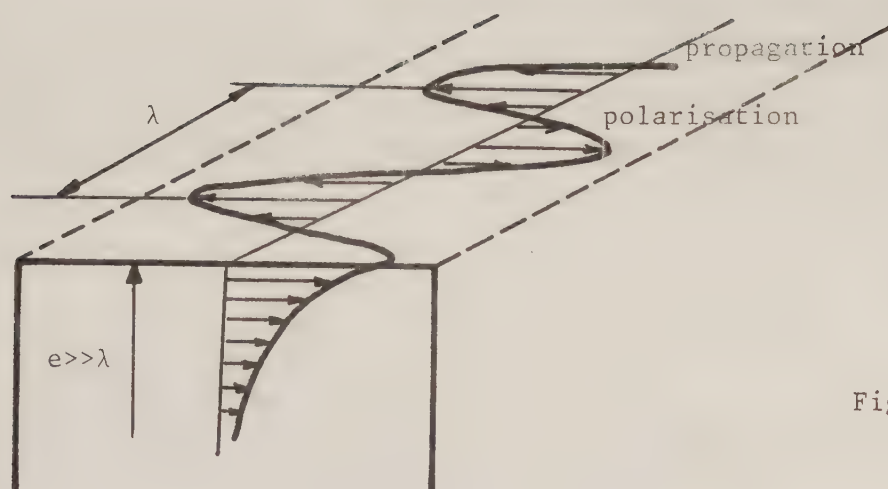


Fig. 3

Comme le montre la figure ci-dessus, la polarisation est purement transversale. L'atténuation à l'intérieur du substrat est beaucoup plus lente que pour les ondes de RAYLEIGH.

1-1-3 - ONDES DE LAMB

Elles se propagent dans des films minces d'épaisseur égale à environ une longueur d'onde (3), (5). Les ondes de LAMB possèdent une composante longitudinale et une composante transversale se déplaçant à des vitesses différentes. Elles sont dispersives.

1-1-4 - ONDES DE STONELEY

Ce sont des ondes de RAYLEIGH se propageant à l'interface de deux matériaux ayant des propriétés élastiques différentes (5). Les ondes de STONELEY sont difficiles à engendrer car elles exigent des conditions très restrictives concernant les masses spécifiques et les coefficients élastiques des deux milieux en regard. Leur vitesse de propagation est intermédiaire entre celle des ondes de RAYLEIGH et celle des ondes de cisaillement du matériau le plus dense.

1-1-5 - ONDES DE LOVE

Lorsque le milieu de propagation est constitué d'une couche mince déposée sur un substrat différent, des ondes transversales, de LOVE, peuvent se propager si certaines conditions de symétrie des matériaux et de vitesse de phase sont réalisées (3), (5).

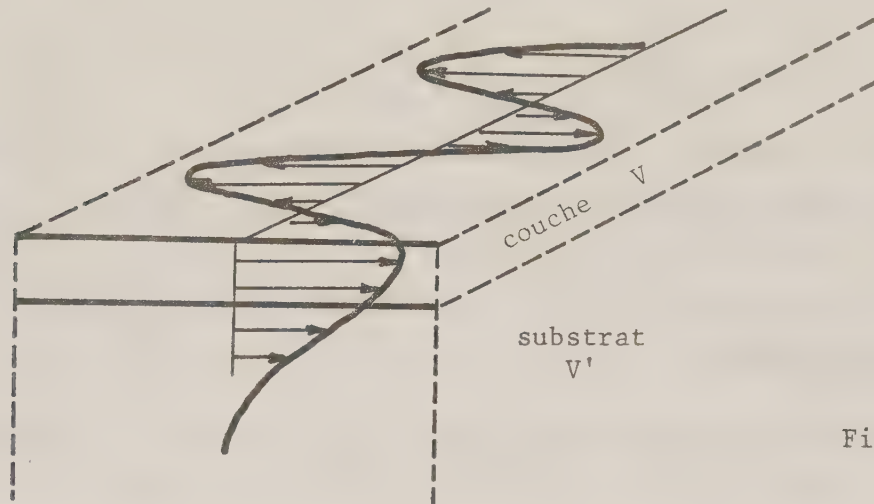


Fig. 4

C'est l'inhomogénéité du milieu total qui maintient l'onde en surface.

Leur vitesse de phase est comprise entre les deux vitesses de propagation des ondes dans la couche mince et dans le substrat. Elles sont dispersives.

1-1-6 - ONDES SE PROPAGEANT LE LONG D'UNE SURFACE CORRUGUEE

Ces ondes se propagent sur un substrat isotrope d'épaisseur finie comportant un ensemble de rainures périodiques à sa face supérieure (6).

Ce sont des ondes de cisaillement horizontal dont la vitesse est beaucoup plus faible que celle des ondes de volume de cisaillement pur, car elles sont très fortement dispersives. Ce type d'ondes peut présenter un intérêt pour réaliser des lignes à grand retard.

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons tout particulièrement aux ondes de RAYLEIGH.

I-2 - EQUATIONS D'ETAT ET D'EQUILIBRE DANS L'APPROXIMATION LINEAIRE

Ce paragraphe sera consacré à la définition des déformations, des contraintes et des conditions d'équilibre dans un solide homogène et linéaire.

I-2-1 - DEFORMATIONS

Nous considérons un solide de forme quelconque qui est soumis à un ensemble de forces extérieures. La position d'un point matériel du milieu non déformé est repérée par les coordonnées a_i . Sous l'action des forces extérieures, le solide se déforme et le point matériel précédent se déplace au point de coordonnées x_i .

$$x_i = a_i + u_i \quad \text{I-1}$$

où le déplacement u_i peut être exprimé en fonction des coordonnées a_i (ou éventuellement des coordonnées x_i).

Deux points voisins, distants de la quantité da_i , se déplacent sous l'action de la déformation et leur distance devient après déformation dx_i .

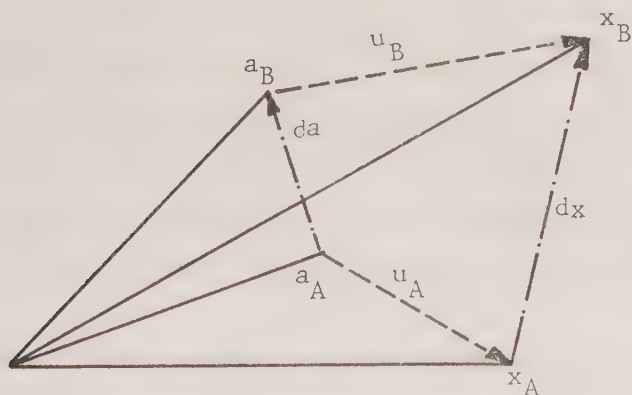


Fig. 5

$$dx_i = da_i + du_i$$

avec

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} da_j$$

Le module de la distance entre les deux points s'écrit après déformation :

$$(dx_i)^2 = (da_i)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) da_i da_j$$

La quantité entre parenthèses est appelée tenseur des déformations :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \right) \quad \text{I-2}$$

En général, les déformations sont petites et $\frac{\partial u_i}{\partial a_j}$ est très inférieur à l'unité.

Les termes $\frac{\partial u_k}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_i}$ sont des infiniment petits du deuxième ordre et seront négligés devant les termes $\frac{\partial u_i}{\partial a_j}$ dans l'approximation linéaire. Dans ce cas, les composantes du tenseur des déformations s'écrivent

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) \quad \text{I-3}$$

1-2-2 - CONTRAINTES

Considérons un élément de surface dS limitant le solide. Une force de surface $\vec{q}$ de composante q_i agit sur cet élément de surface qui est repéré par sa normale $\vec{n}$ de cosinus directeur n_j .

La surface dS peut être représentée par trois composantes dS_j

$$dS_j = n_j dS$$

Soient T_{ij} les efforts qui agissent respectivement sur chaque composante dS_j de l'élément de surface dS . L'équilibre se traduit par :

$$q_i dS = T_{ji} dS_j = T_{ji} n_j dS$$

soit

$$q_i = T_{ji} n_j \quad \text{I-4}$$

Le tenseur T_{ji} définit l'état de contrainte du milieu déformé. Dans l'approximation linéaire, le tenseur T_{ji} est symétrique

$$T_{ji} = T_{ij} \quad \text{I-5}$$

On verra dans le chapitre suivant que cette symétrie n'est plus vérifiée dans le cas des déformations finies.

I-2-3 - RELATION EFFORTS - DEFORMATIONS

Dans l'approximation linéaire, la loi de HOOKE exprime la proportionnalité entre efforts et déformations suivant la relation

$$T_{ji} = C_{ijkl} S_{kl} \quad \text{I-6}$$

Les coefficients

$$C_{ijkl} = \left(\frac{\partial T_{ji}}{\partial S_{kl}} \right)_{S_{kl}=\text{cte}} \quad \text{I-7}$$

sont les coefficients élastiques qui sont caractéristiques des propriétés du matériau.

Ils présentent eux aussi des propriétés de symétrie :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} = C_{klij}$$

En introduisant les gradients des déplacements (I-2) dans la loi de HOOKE et en tenant compte des propriétés de symétrie, on obtient la relation effort-déplacement

$$T_{ji} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} \quad \text{I-8}$$

Remarque : Dans l'approximation linéaire, les coordonnées des points sont appelés indistinctement a_i ou x_i . Ceci ne sera plus valable dans la théorie non linéaire car il faudra distinguer les différents états du milieu.

1-2-4 - EQUATIONS DE CONSERVATION

Les forces mises en jeu dans un solide sont de deux natures : les forces de volume $\vec{F}$ et les forces de surface $\vec{q}$.

Les forces de volume $\vec{F}$ résultent d'effets mécaniques agissant sur l'ensemble du volume du solide, par contre les forces de surface $\vec{q}$ résultent de l'action des éléments extérieurs proches de la surface.

Les lois de conservation expriment la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation du moment cinétique.

La première est identiquement vérifiée dans le cas de l'approximation linéaire et la troisième conduit à la symétrie du tenseur des efforts.

Considérons l'équation correspondant à la conservation de la quantité de mouvement et soient ρ la masse spécifique du solide et $\vec{v}$ la vitesse d'un point matériel.

La somme totale des forces de volume et de surface est égale à la variation dans le temps de la quantité de mouvement

$$\int_S \vec{q} dS + \int_V \vec{F} dV = \frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \vec{v} dV \right) \quad \text{I-9}$$

ce qui s'écrit en utilisant la relation I-4

$$\int_S n_j T_{ji} dS + \int_V F_i dV = \int_V \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} dV \quad \text{I-10}$$

L'intégrale de surface peut être transformée en intégrale de volume. La relation ainsi obtenue, traduisant l'équilibre du milieu, est indépendante de l'élément de volume utilisé. Par conséquent elle ne peut être vérifiée que par :

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + F_i \quad \text{I-11}$$

Cette équation est appelée équation d'équilibre.

Elle reste valable en régime non linéaire mais il convient de remarquer qu'elle met en jeu les efforts de l'état déformé et qu'elle est exprimée dans l'état déformé.

En utilisant la relation effort-déplacement, on obtient l'équation de propagation

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + F_i \quad \text{I-12}$$

à laquelle il conviendra d'associer les conditions aux limites convenables.

I-3 - CALCUL DES CARACTERISTIQUES DES ONDES DE RAYLEIGH

Un certain nombre de grandeurs permettent de caractériser les conditions de propagation des ondes de RAYLEIGH.

Les différentes composantes se propagent avec la même vitesse V_0 , celle-ci étant très inférieure à la célérité des ondes électromagnétiques.

Les efforts et les déformations associées sont confinés près de la surface du milieu de propagation. L'amplitude décroît exponentiellement à l'intérieur du matériau et devient négligeable à une profondeur de quelques longueurs d'ondes acoustiques.

Les ondes de RAYLEIGH peuvent se propager dans une direction quelconque à la surface du matériau. Cependant, il est en général nécessaire d'utiliser des directions telles que la direction principale du flux d'énergie fasse un angle faible avec la direction de propagation choisie, ceci afin d'obtenir un signal d'amplitude suffisante à la réception.

Lorsque le milieu est piézoélectrique, les déformations mécaniques sont accompagnées d'un champ électrique.

Le paramètre caractérisant l'effet de la piézoélectricité est le coefficient de couplage électromécanique k^2 . C'est un paramètre important car il caractérise en fait les conditions d'excitation et de détection de l'onde par effet piézoélectrique.

La résolution des équations de propagation associées aux conditions limites permettra de déterminer les caractéristiques de l'onde de RAYLEIGH se propageant à la surface d'un matériau monocristallin, piézoélectrique ou non, quelle que soit l'orientation cristallographique du cristal, caractérisée par la coupe et quelle que soit la direction de propagation.

1-3-1 - PARAMETRES ANGULAIRES DU SUBSTRAT

Lorsque le matériau est isotrope, les propriétés de l'onde de RAYLEIGH caractérisées par

- la vitesse de propagation,
- les composantes de l'amplitude et les coefficients de pénétration,
- la direction du flux d'énergie,

sont indépendantes de l'orientation de la plaque cristalline et de la direction de propagation.

Il n'en est pas de même lorsque le substrat est anisotrope. Dans ce cas, beaucoup plus intéressant du point de vue des applications pratiques, il faut introduire les paramètres angulaires permettant de "repérer" l'orientation de la lame cristalline par rapport à un système d'axes fixe.

En effet, les coefficients élastiques C_{ijkl} , ainsi que les coefficients e_{ijk} caractérisant la piézoélectricité et ϵ_{ij} la permittivité du milieu d'un cristal anisotrope dépendent de la façon dont il est coupé.

La coupe cristalline est définie par deux angles qui sont les deux paramètres intervenant en ondes de volume.

Dans le cas des ondes de surface, il faut aussi faire intervenir l'angle caractérisant la direction de propagation à la surface du substrat précédemment défini.

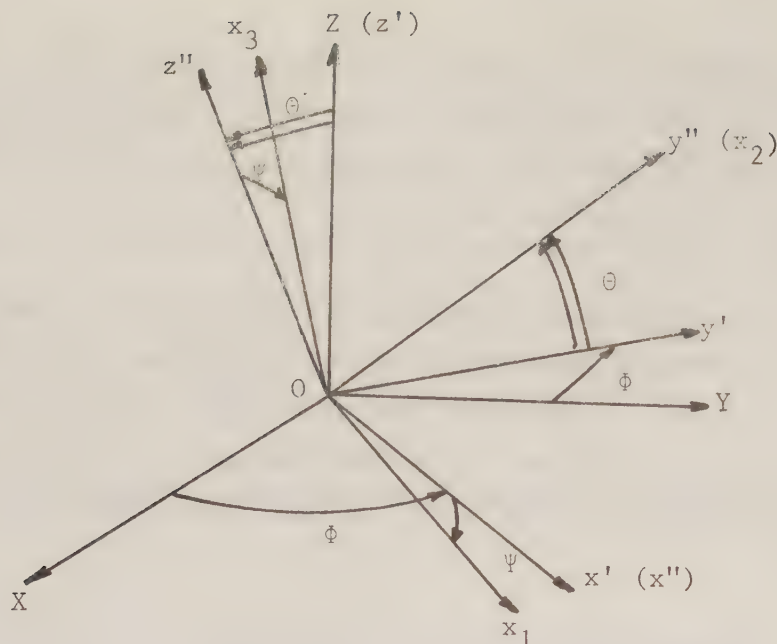


Fig. 6

La figure (6) montre que la coupe du cristal est définie à partir des axes cristallographiques $\vec{OX}$, $\vec{OY}$, $\vec{OZ}$ par deux rotations successives.

Partant d'une plaque semi-infinie dont la surface libre a pour normale l'axe $\vec{OY}$, nous effectuons une rotation d'angle ϕ autour de l'axe $\vec{OZ}$, suivie d'une rotation d'angle θ autour du nouvel axe $\vec{OX'}$. La nouvelle coupe sera ainsi repérée par les angles (ϕ, θ) .

La direction de propagation à la surface de la coupe (ϕ, θ) est alors définie par une rotation d'angle ψ autour de la normale à la plaque $\vec{OY''}$.

Le repère définitif sera appelé $(0, x_1, x_2, x_3)$. Préalablement à la résolution des équations de propagation, les coefficients élastiques, piézoélectriques et autres du matériau seront calculés dans ce nouveau repère.

Ainsi la direction de propagation considérée sera toujours parallèle à l'axe $\vec{Ox}_1$.

1-3-2 - CAS D'UN SOLIDE PUREMENT ELASTIQUE

Précédemment, nous avons montré qu'en l'absence de forces de volume, l'équation de propagation dans un milieu homogène anisotrope purement élastique s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \quad \text{I-13}$$

où ρ_0 est la masse volumique du milieu

u_i sont les composantes du déplacement de chaque point du matériau et C_{ijkl} sont les coefficients du tenseur d'élasticité calculés dans le repère Ox_1, x_2, x_3 .

La solution correspondant à une onde de RAYLEIGH dans le cas d'un cristal semi-infini est de la forme :

$$u_i = {}^0u_i e^{i\omega_0 \left(t - \frac{n_l x_l}{V_0}\right)} \quad \text{I-14}$$

où V_0 est la vitesse de propagation

et 0u_i les composantes de l'amplitude de l'onde.

En reportant cette solution dans l'équation de propagation (I-13), nous obtenons un système linéaire homogène de trois équations en 0u_i que l'on appelle équation de CHRISTOFFEL.

$$\lambda_0 {}^0u_i = \Gamma_{il} {}^0u_l \quad \text{I-15}$$

$$\text{avec} \quad \lambda_0 = \rho_0 V_0^2 \quad \text{I-16}$$

et les coefficients de CHRISTOFFEL

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k \quad \text{I-17}$$

Remarque : Du point de vue analytique, la direction de propagation étant toujours rendue parallèle à l'axe $\vec{Ox}_1$ par rotations préalables, les cosinus directeurs définissant la propagation de l'onde sont :

$$n_1 = 1 \quad n_2 = n_2 \quad \text{et} \quad n_3 = 0$$

Les composantes de l'amplitude $^o u_i$ apparaissent comme un vecteur propre du tenseur $\Gamma_{i\ell}$, λ_o étant sa valeur propre.

Par suite, le système aura des solutions non nulles si le déterminant est nul

$$\det (\Gamma_{i\ell} - \lambda_o \delta_{i\ell}) = 0 \quad \text{I-18}$$

Ce déterminant conduit à une équation à deux inconnues n_2 et λ_o qui, en posant $n_2 = q$, prend la forme :

$$aq^6 + bq^5 + cq^4 + dq^3 + eq^2 + fq + g = 0 \quad \text{I-19}$$

où les coefficients réels a, b, c, d, e, f, g sont des fonctions de λ_o et des $C_{ijk\ell}$.

Pour la suite, nous considérerons V_o , donc λ_o , comme un paramètre.

L'équation du sixième degré admet, en général, trois paires de racines complexes conjuguées : q_r ($r = 1, 2, 3$).

Pour que l'amplitude de l'onde s'amortisse à l'intérieur du matériau (sens des x_2 négatifs), nous ne garderons que les trois racines dont les parties imaginaires sont positives.

A chacune de ces solutions q_1, q_2, q_3 , est associé un vecteur propre $^o u_k^{(r)}$ donc un déplacement $u_k^{(r)}$.

Les composantes u_k du déplacement sont des combinaisons linéaires des trois ondes élémentaires correspondant à chaque valeur de q_r et ayant toutes la même vitesse V_o

$$u_k = \sum_{r=1}^3 A_r \cdot ^o u_k^{(r)} e^{i\omega_o(t - \frac{n_\ell^{(r)} x_\ell}{V_o})} \quad \text{I-20}$$

avec : $\left. \begin{array}{l} n_1^{(r)} = 1 \\ n_3^{(r)} = 0 \end{array} \right\} \text{ quelle que soit la valeur de } r$

et $n_2^{(r)} = q^r = a_r + ib_r$

En développant partiellement,

$$u_k = \sum_{r=1}^3 A_r \circ u_k^{(r)} e^{\frac{\omega_0}{V_0} b_r x_2} e^{i\omega_0 \left(t - \frac{x_1 + a_r x_2}{V_0} \right)} \quad \text{I-21}$$

apparaît le coefficient de pénétration $\frac{\omega_0}{V_0} b_r$. I-22

Les équations de CHRISTOFFEL permettent de calculer les vecteurs propres $\circ u_k^{(r)}$ à une constante multiplicative près.

$$P_r = \frac{\circ u_2^{(r)}}{\circ u_1^{(r)}} \quad \text{et} \quad Q_r = \frac{\circ u_3^{(r)}}{\circ u_1^{(r)}} \quad \text{I-23}$$

La condition aux limites mécaniques, qui exprime qu'il n'y a pas de contraintes appliquées sur la surface de propagation, permet de déterminer entièrement les amplitudes des composantes du déplacement.

$$\text{Pour } x_2 = 0 \quad T_{2j} = C_{2jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = 0 \quad \text{I-24}$$

$$\text{soit } \sum_{r=1}^3 C_{2jkl} \circ u_k^{(r)} n_l^{(r)} A_r = 0 \quad \text{pour } x_2 = 0$$

qui s'écrit encore, en posant

$$B_r = A_r \circ u_1^{(r)} \quad \text{I-25}$$

$$\text{et} \quad \zeta_{jr} = C_{2jkl} \frac{\circ u_k^{(r)}}{\circ u_1^{(r)}} n_l^{(r)} \quad \text{I-26}$$

$$\sum_{r=1}^3 B_r \zeta_{jr} = 0 \quad \text{I-27}$$

Les valeurs B_r se présentent comme les composantes d'un vecteur, donc, pour que le système soit nul, il faut que le déterminant des valeurs ζ_{jr} soit nul.

Considérons alors le déterminant $\Delta = \det (\zeta_{jr})$

I-28

Il existe deux possibilités :

- 1 - Si $\Delta \neq 0$: la condition limite n'est pas satisfaite, donc la valeur de V_0 prise comme paramètre ne convient pas et il faudra recommencer le calcul en prenant une autre valeur de la vitesse.
- 2 - Si $\Delta = 0$: l'équation de propagation et la condition limite élastique sont satisfaites. Une onde de RAYLEIGH se propage suivant Ox_1 avec une vitesse de phase V_0 . Le déplacement mécanique aura pour composantes u_k qui s'amortiront en profondeur avec des coefficients $\frac{\omega_0}{V_0} b_r$.

1-3-3 - CAS D'UN SOLIDE PIEZOELECTRIQUE

Dans un matériau piézoélectrique, il existe une interdépendance entre les propriétés mécaniques et électriques.

La polarisation électrique est due d'une part à l'effet du champ électrique et d'autre part à l'action des déformations mécaniques induisant par l'effet piézoélectrique direct une polarisation. L'induction électrique est donc la somme des deux termes

$$D_j = \epsilon_{jk} E_k + e_{jkl} S_{kl} \quad \text{I-29}$$

ϵ_{jk} : coefficients du tenseur de permittivité

E_k : champ électrique appliqué

$e_{jkl} = \left(\frac{\partial D_j}{\partial S_{jk}} \right)_{\vec{E}=0}$: coefficients du tenseur de piézoélectricité

S_{kl} : tenseur des déformations mécaniques.

D'un point de vue mécanique, les forces extérieures agissant sur le cristal piézoélectrique sont d'origine mécanique et électrique. Le travail fourni pour déformer le cristal sera donc la somme de deux termes.

Par suite, la contrainte totale due aux deux effets s'écrit sous la forme :

$$T_{ji} = C_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \quad \text{I-30}$$

où les coefficients C_{ijkl}^E sont mesurés à champ électrique constant.

Les coefficients caractérisant entièrement le cristal : C_{ijkl}^E , e_{kij} et ϵ_{jk} sont calculés dans le repère Ox_1, x_2, x_3 .

Le champ électrique $\vec{E}$ dérive du potentiel électrique Φ et a pour composantes

$$E_k = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \quad \text{I-31}$$

Nous considérerons que la conductibilité du matériau est négligeable et que par conséquent il n'y a pas de charges d'espace :

$$\frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{I-32}$$

Nous supposerons aussi que nous sommes dans le cas d'un problème électromagnétique quasi-statique.

L'équation de propagation reste identique :

$$\rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}$$

En introduisant les relations (I-29) et (I-30) dans l'équation d'équilibre et en calculant la conductibilité, nous obtenons un système aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= C_{ijkl}^E \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \\ e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \epsilon_{jk} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} &= 0 \end{aligned} \quad \text{I-33}$$

avec $i, j, k, l = 1, 2, 3$

La résolution se fait comme précédemment avec une relation supplémentaire due au potentiel électrique. Les solutions cherchées sont :

$$\begin{cases} u_j = {}^o u_j e^{i\omega_o(t - \frac{n_l x_l}{V_o})} \\ \phi = {}^o u_4 e^{i\omega_o(t - \frac{n_l x_l}{V_o})} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{I-34}$$

En reportant ces solutions dans les équations de propagation ci-dessus, nous obtenons un système linéaire de quatre équations en ${}^o u_p$

$$(\Gamma_{pq} - \delta'_{pq} \lambda_o) {}^o u_p = 0 \quad \text{I-35}$$

Pour une vitesse donnée, le déterminant de l'équation de CHRISTOFFEL piézo-électrique conduit à une équation du 8e degré en $q = n_2$

$$\det (\Gamma_{pq} - \delta'_{pq} \lambda_o) = 0 \quad \text{I-36}$$

avec $p, q = 1, 2, 3, 4$.

Si $p, q = 1, 2, 3$ alors Γ_{pq} est égal à $C_{pj k q} n_j n_k$

Si $p, q = 4$ alors $\Gamma_{p4} = \Gamma_{4p} = e_{kpj} n_j n_k$ et $\Gamma_{44} = -\epsilon_{jk} n_j n_k$

δ'_{pq} est le symbole de Kronecker qui a pour particularité : $\delta'_{44} = 0$.

Comme précédemment, nous cherchons les quatre solutions donnant un coefficient d'amortissement en profondeur adéquat. Il faut que ces solutions vérifient les conditions limites pour que la vitesse V choisie puisse convenir.

Les conditions aux limites sont de deux types :

- mécanique :

il n'y a pas de forces appliquées à la surface de propagation, donc :

$$T_{2j} = 0 \quad \text{en} \quad x_2 = 0 \quad \text{I-37}$$

- électrique :

a) le potentiel doit satisfaire l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ au-dessus de la lame. Il doit aussi être continu au passage de la

face libre ($x_2 = 0$) et doit s'annuler quand x_2 tend vers l'infini.

- b) les équations de Maxwell imposent la continuité de la composante continue du déplacement électrique D à travers la surface de séparation des milieux.

Remarque : Dans le cas où le matériau utilisé est faiblement piézoélectrique une méthode approchée permet d'introduire l'effet piézoélectrique plus simplement et de revenir à un traitement analytique identique au cas purement élastique.

Si nous considérons que l'onde est plane, en introduisant les relations suivantes :

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl}^E n_j n_k \quad K_i = e_{kij} n_j n_k \quad \epsilon = \epsilon_{jk} n_j n_k$$

les équations d'équilibre prennent la forme :

$$\lambda_o \circ u_i = \Gamma_{il} \circ u_l + K_i \circ u_4$$

$$K_l \circ u_l - \epsilon \circ u_4 = 0$$

En éliminant le potentiel électrique $\circ u_4$, il vient :

$$\lambda_o \circ u_i = \left(\Gamma_{il} + \frac{K_i K_l}{\epsilon} \right) \circ u_l \quad \text{I-38}$$

Nous sommes ramenés à un système de trois équations en $\circ u_l$ avec des coefficients de CHRISTOFFEL "durcis" Γ_{il}^D

$$\Gamma_{il}^D = \Gamma_{il} + \frac{K_i K_l}{\epsilon}$$

que l'on peut écrire, en introduisant des constantes élastiques "durcies" :

$$\Gamma_{il}^D = C_{ijkl}^D n_j n_k$$

où les constantes durcies C_{ijk}^D sont de la forme :

$$C_{ijkl}^D = C_{ijkl}^E + \frac{(e_{pij} n_p)(e_{qkl} n_q)}{\epsilon_{jk} n_j n_k} \quad \text{I-39}$$

La résolution se fait alors comme pour des ondes purement élastiques. Cette méthode est rigoureuse dans le cas d'ondes planes de volume, car la direction du vecteur de propagation, donc les cosinus directeurs n_1, n_2, n_3 sont parfaitement définis. Le calcul des constantes durcies en découle directement.

Dans le cas des ondes de surface, le cosinus directeur n_2 est une inconnue du problème. Les constantes durcies ne sont pas alors entièrement définies. Cependant, lorsque l'effet piézoélectrique est faible, la méthode des constantes durcies permet d'en tenir compte comme une correction des coefficients élastiques.

Pour ce faire, l'onde étant confinée dans une faible épaisseur du substrat, on effectue la correction due à l'effet piézoélectrique en nous plaçant dans le plan de la surface et dans la direction de propagation considérée $\vec{Ox}_1$.

Ainsi les cosinus directeurs intervenant dans le calcul des constantes élastiques durcies sont :

$$n_1 = 1 \quad n_2 = 0 \quad \text{et} \quad n_3 = 0$$

I-3-4 - FLUX D'ENERGIE

Lorsque l'onde de RAYLEIGH se propage, l'énergie transportée par unité de temps à travers une surface unitaire, appelée flux d'énergie, correspond à un vecteur $\vec{\mathcal{E}}$ de composantes $\mathcal{E}_i$ telles que

$$\mathcal{E}_i = \text{Partie Réelle } (T_{ij}) \times \text{Partie réelle } \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \quad \text{I-40}$$

Dans le cas d'une vibration sinusoïdale, sa moyenne temporelle est appelée "vecteur de Poynting mécanique" $\vec{P}$ de composantes

$$P_i = -\frac{1}{2} \text{Partie Réelle } \left(T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \quad \text{I-41}$$

La moyenne temporelle du flux de puissance de l'onde élastique est donnée par le vecteur $\vec{W}$ tel que

$$W_i = -\frac{1}{2} \text{Partie Réelle} \left(\int_0^\infty T_{ij} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^* da_2 \right) \quad \text{I-42}$$

Soit, en remplaçant T_{ij} et u_j par leurs expressions :

$$W_i = \text{Partie Réelle} \left\{ \frac{1}{2} \sum_n \sum_m C_{ijkl} \frac{\omega_0^2}{V_0} A_n A_m^* u_k^{(n)} u_j^{(m)*} n_\ell^{(n)} / i \frac{\omega_0}{V_0} (q_m^* - q_n) \right\} \quad \text{I-43}$$

avec $n_1^{(n)} = 1$ et $n_3^{(n)} = 0$ quel que soit n , $i = 1, 3$ $j, k, \ell, m, n = 1, 2, 3$.

Le rapport $W_3 / W_1 = \text{tg } \Phi'$ donne la direction du flux d'énergie de l'onde de RAYLEIGH par rapport à la direction $\vec{Ox}_1$ choisie pour la propagation (fig. 7).

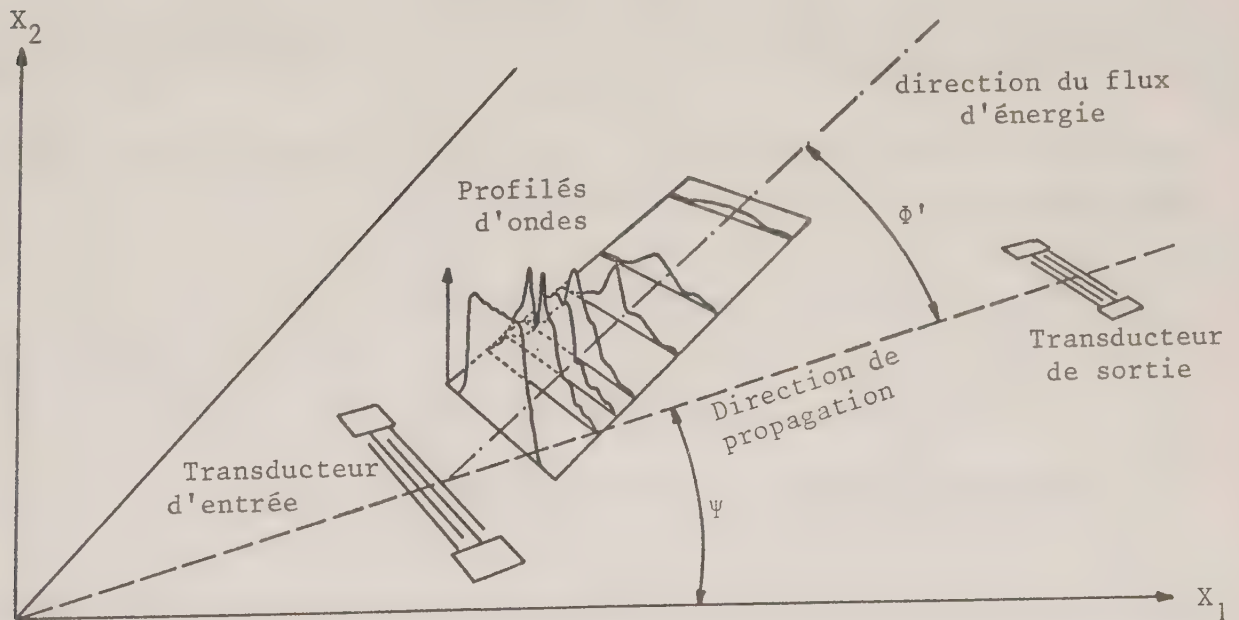


Fig. 7

Il est évident que pour une bonne réception de l'onde émise, l'angle Φ' doit être le plus faible possible.

Les ondes de RAYLEIGH pour lesquelles la direction du flux d'énergie est colinéaire avec la direction de propagation correspondent à des modes "purs".

I-3-5 - COUPLAGE ELECTROMECHANIQUE

Lorsque les matériaux sont piézoélectriques, le coefficient de couplage électromécanique exprime le rendement de la conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique.

CAMPBELL et JONES l'ont défini (32) par la relation :

$$k^2 = 2 \frac{V_o - V_M}{V_M} \quad \text{I-44}$$

où V_o est la vitesse de propagation de l'onde sur la surface libre (le potentiel de référence nul étant réjeté à l'infini)

et V_M la vitesse de propagation de l'onde lorsque la surface est recouverte d'un film métallique mince porté au potentiel zéro.

Il existe d'autres définitions du couplage électromécanique k^2 obtenues soit à partir de la notion d'impédance de surface par INGEBRIGSTEN (33), soit par une méthode de perturbation valable pour les matériaux à faibles coefficients piézoélectriques, proposée par COQUIN et TIERSTEN (34).

Toutes ces définitions nécessitent la résolution complète des équations de propagation dans le cas du solide piézoélectrique.

I-4 - METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE

La présentation des calculs analytiques permettant d'obtenir les grandeurs caractérisant une onde de RAYLEIGH se propageant sur un substrat purement élastique ou non, faite dans le paragraphe précédent, laisse supposer que la résolution analytique des systèmes d'équations obtenus sera quelque peu difficile et même impossible sauf dans des cas particuliers très simples comme par exemple celui d'un cristal isotrope.

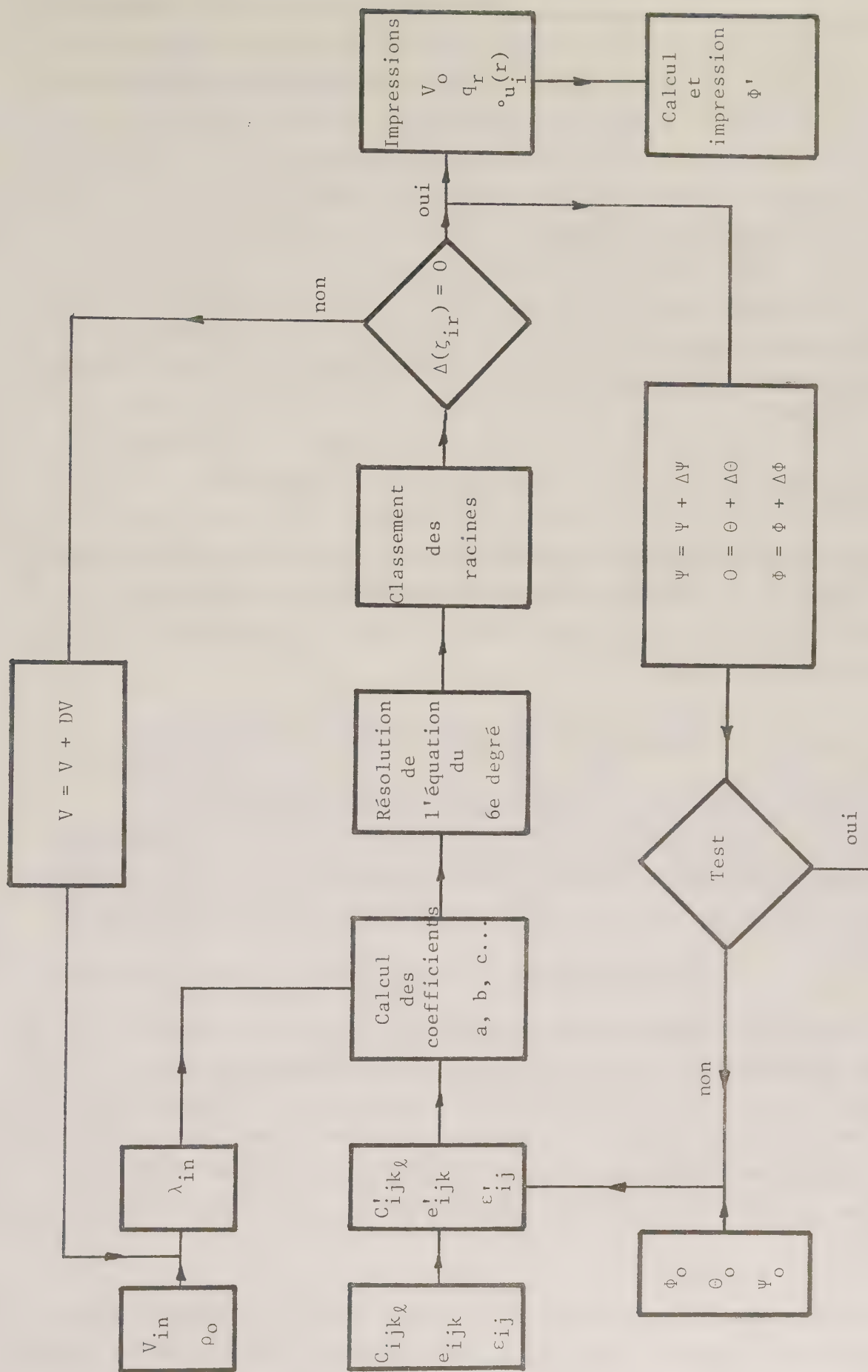


Fig. 8

L'étude des propriétés des ondes de RAYLEIGH dans des cas plus généraux nécessite la mise au point d'un programme de calcul numérique pouvant ainsi être utilisé pour divers cristaux et dans toutes leurs configurations possibles.

1-4-1 - PROGRAMME DE CALCUL

Le programme permet de calculer la vitesse de propagation, les amplitudes des composantes de l'onde, les atténuations à l'intérieur du cristal et la direction du flux d'énergie pour toute direction choisie dans n'importe quelle coupe.

L'organigramme des calculs est représenté sur la figure (8).

Au départ, sont choisies les valeurs initiales des trois paramètres angulaires Φ_0 , Θ_0 et Ψ_0 et sont introduits les coefficients caractérisant le matériau, C_{ijkl} , e_{ijk} et ϵ_{ij} rapportés à un repère qui correspond en général à une coupe X, Y ou Z.

Tout d'abord sont calculées les nouvelles valeurs des coefficients caractéristiques dans le repère défini par Φ_0 , Θ_0 et Ψ_0 . Une valeur initiale V_{in} de la vitesse de propagation est introduite. Après avoir calculé $\lambda_{in} = \rho_0 V_{in}^2$, puis les coefficients de l'équation du 6e (ou du 8e) degré, un sous-programme permet d'obtenir les racines de cette équation et d'en extraire celles qui correspondent à une atténuation à l'intérieur du matériau.

Les valeurs ainsi obtenues permettent de calculer P_r et Q_r ainsi que les termes du déterminant $\Delta = \det (\zeta_{ir})$. Un sous-programme de calcul de déterminant, puis un test de comparaison de la valeur de ce déterminant avec zéro, indiquent s'il faut changer la valeur de la vitesse V par incrémentation dichotomique c'est-à-dire avec un pas variable dans la limite de résolution choisie, ou, la précision étant jugée suffisante, les résultats peuvent être imprimés.

Un calcul annexe donne la valeur de Φ' définissant la direction du flux d'énergie à la surface lorsque la vitesse des ondes de RAYLEIGH est trouvée.

En même temps, nous pouvons faire une incrémentation sur les valeurs de Ψ ou Θ ou Φ et recommencer le calcul pour d'autres configurations du cristal. L'une des difficultés de ce calcul est de conserver un classement fixe des trois racines de l'équation polynomiale au cours du cycle de calcul jusqu'à l'obtention de la vitesse de propagation. En effet, certaines permutations, lors de la prise en compte des racines pour effectuer le calcul des coefficients ζ_{ir} , provoquent un changement de signe du déterminant et indiquent d'une manière erronée le passage par zéro de ce déterminant.

Le programme de calcul actuellement introduit dans un ordinateur IRIS 50 du Centre de Calcul de l'Université de Besançon est structuré en neuf sous-programmes et une édition de lien représentant environ trente kilooctets d'occupation dans la mémoire de l'ordinateur.

Le temps de calcul des paramètres caractéristiques d'une onde de RAYLEIGH pour une direction et une coupe de matériau donné est d'environ 1 à 2 secondes et dépend essentiellement de la valeur initiale de la vitesse V_{in} .

1-4-2 - ONDE DE RAYLEIGH SUR UN SUBSTRAT DE QUARTZ

Le programme décrit précédemment peut être appliqué à la recherche des propriétés des ondes de RAYLEIGH se propageant sur de nombreux matériaux. Dans le cadre du travail présenté dans ce mémoire, nous nous intéresserons plus particulièrement au cristal de quartz.

CONSIDERATIONS DE SYMETRIE ET COUPES A DOUBLE ROTATION

Les différentes orientations du quartz sont définies par les deux angles Φ et Θ , correspondant à deux rotations successives à partir de la coupe Y, comme l'indique la figure (9).

La propagation des ondes de surface introduit un degré de liberté supplémentaire : la direction de propagation de l'onde. Elle est repérée

Fig. 9

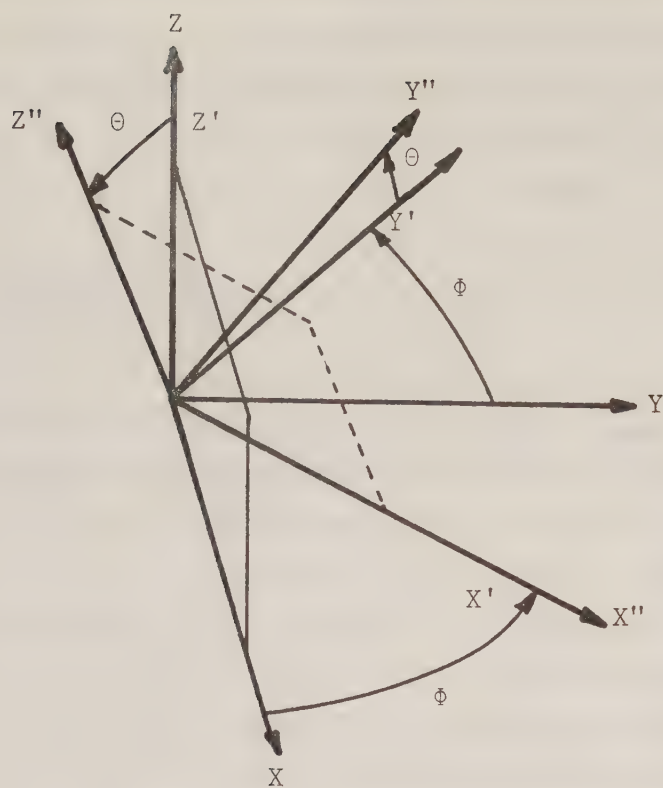
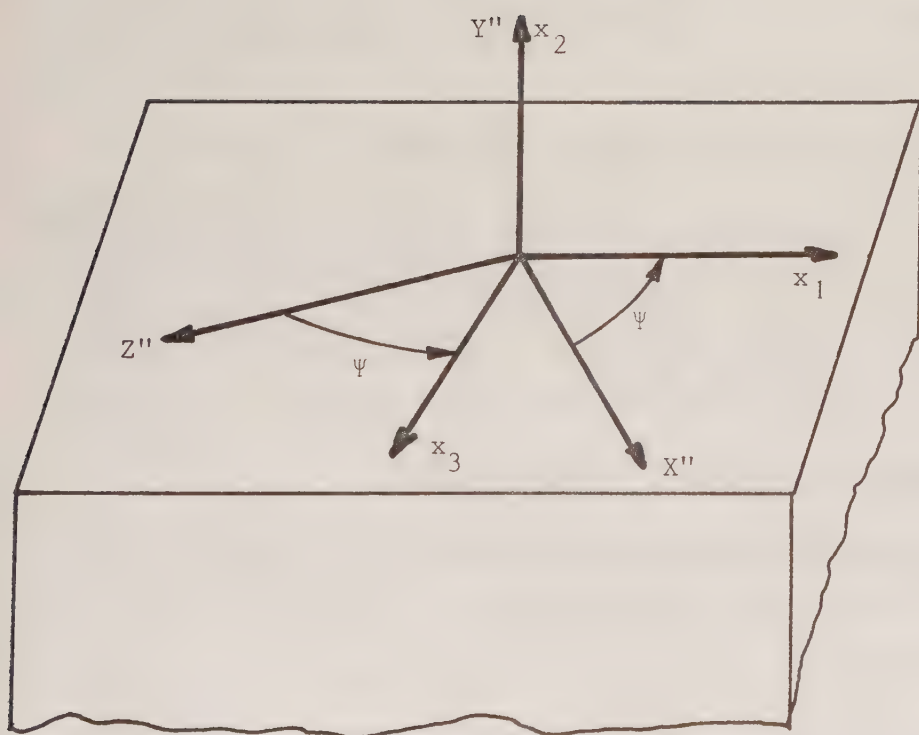


Fig. 10



par une rotation d'angle Ψ autour du nouvel axe Y'' obtenu après les rotations Φ et Θ (fig. 10).

Le trièdre final dans lequel nous effectuerons les calculs des propriétés est donc représenté par les axes $\vec{Ox}_1$, $\vec{Ox}_2$ et $\vec{Ox}_3$; la propagation se faisant parallèlement à l'axe $\vec{Ox}_1$.

La classe cristalline à laquelle appartient le quartz possède des symétries d'ordre 3 autour de OZ et d'ordre 2 autour de OX.

Une exploration complète des propriétés des ondes de RAYLEIGH sur le quartz nécessite de faire varier la direction de propagation Ψ de 0° à 180° . Ceci revient à introduire l'axe OY comme axe de symétrie binaire. Par conséquent, les propriétés des ondes de RAYLEIGH, pour les valeurs de Ψ comprises entre 90° et 180° , se déduisent des précédentes en changeant Φ en $-\Phi$.

En résumé, l'espace des valeurs de Φ , Θ et Ψ que nous considérerons pour obtenir les valeurs numériques caractérisant les ondes de RAYLEIGH se propageant sur le quartz, est défini par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} 0^\circ &\leq \Phi \leq 60^\circ \\ -90^\circ &\leq \Theta \leq 90^\circ \\ 0^\circ &\leq \Psi \leq 90^\circ \end{aligned} \quad \text{Tableau I}$$

Les autres valeurs sont obtenues :

- a) pour Φ compris entre 60° et 120° , en changeant Θ en $-\Theta$
- b) pour Ψ compris entre 90° et 180° , en changeant Φ en $-\Phi$.

Remarque : Pour des coupes de quartz à simple rotation ($\Phi = 0^\circ$), les considérations précédentes entraînent que les propriétés de l'onde sont symétriques autour de la valeur $\pi/2$ de l'angle Ψ .

Les symétries réduisent le nombre de configurations qu'il est nécessaire de calculer pour connaître complètement les propriétés de l'onde.

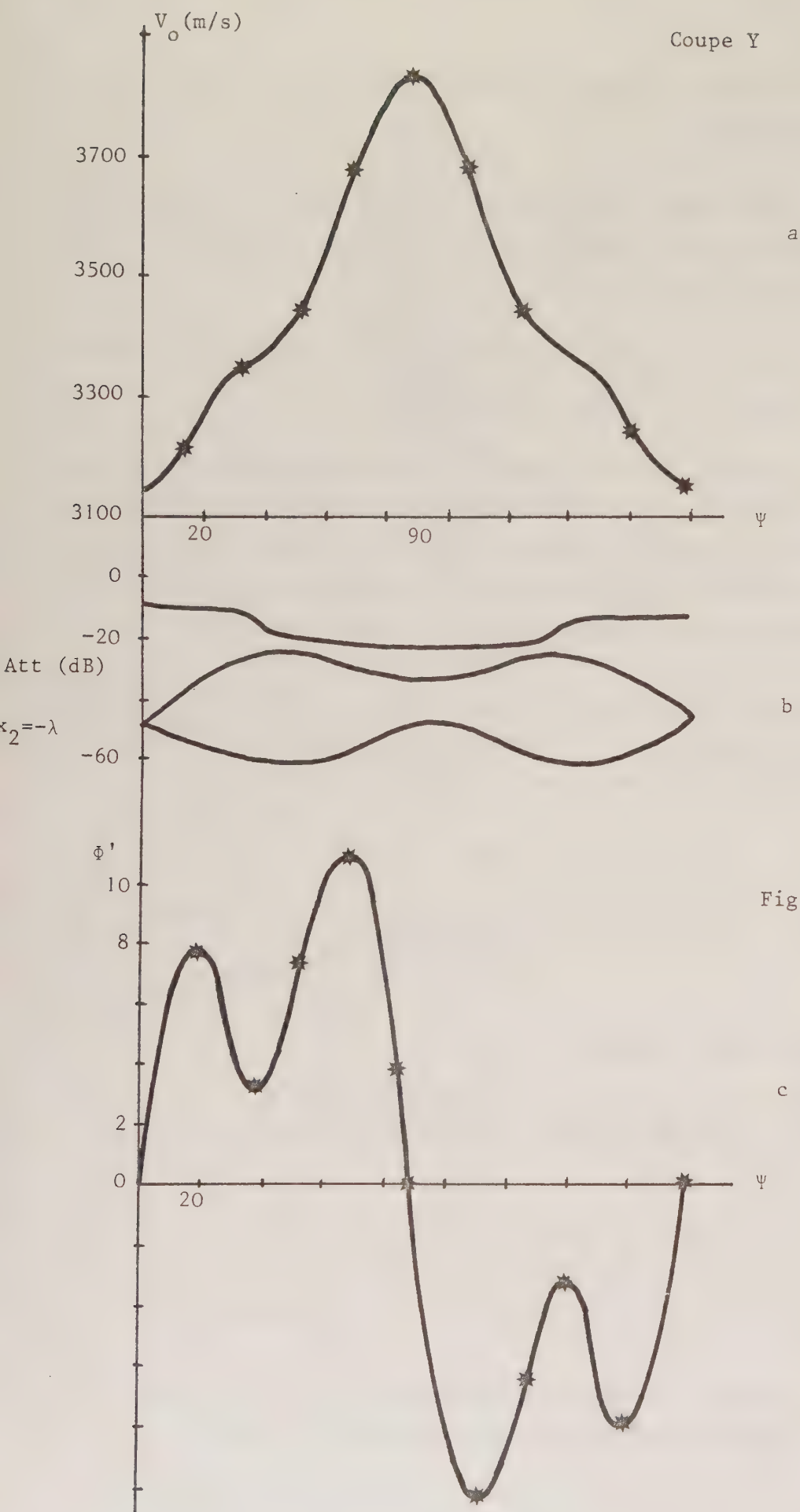


Fig. 11

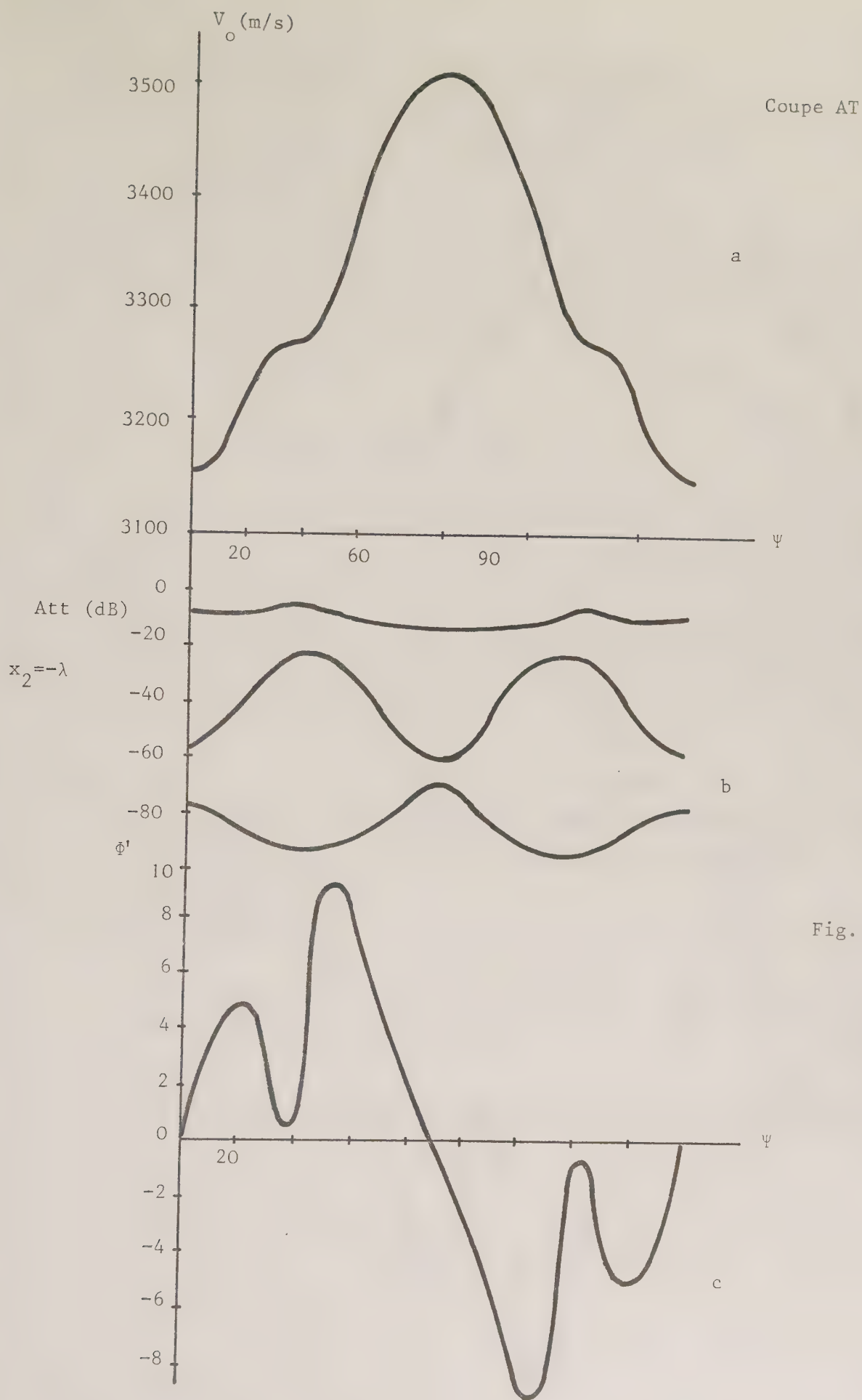


Fig. 12

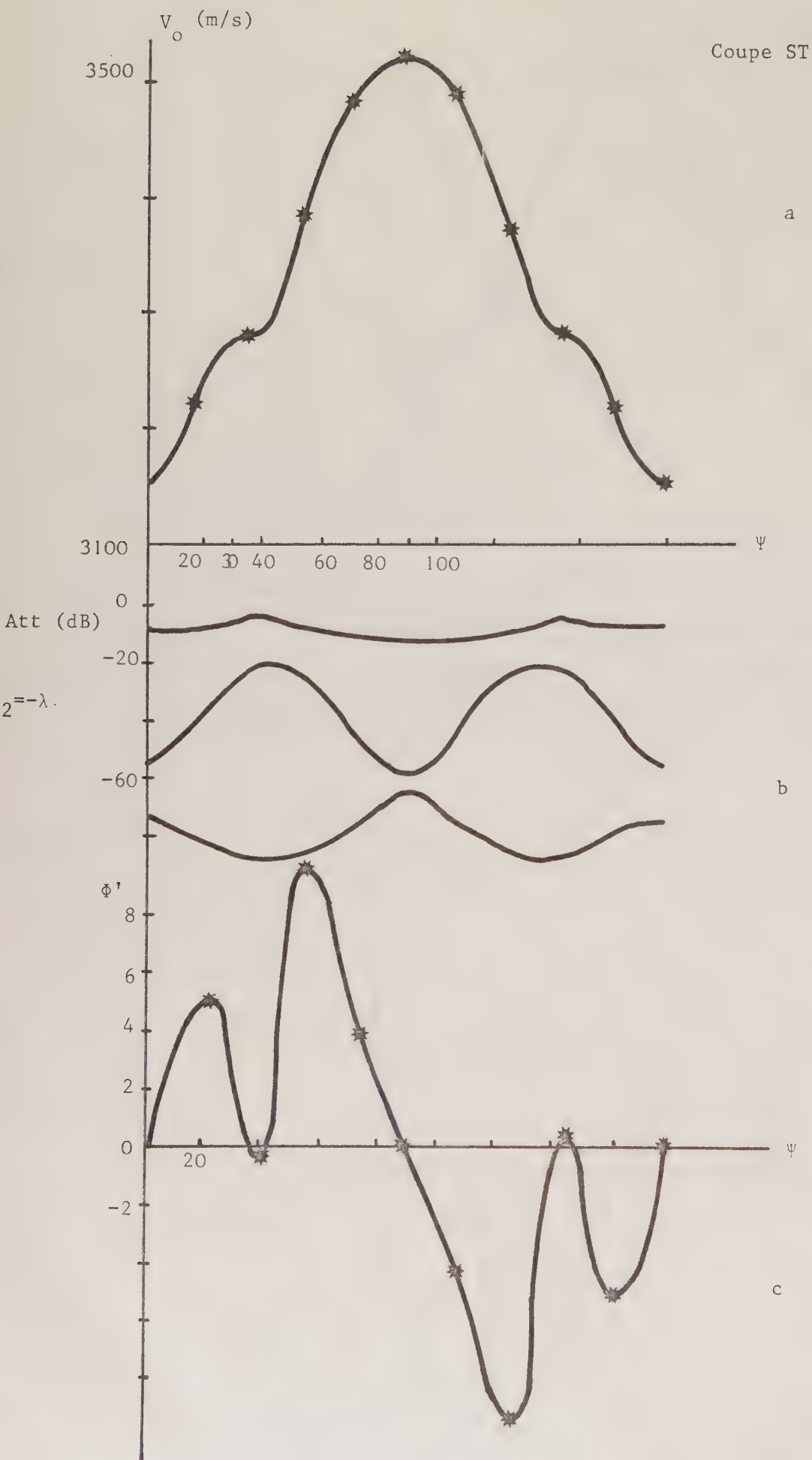


Fig. 13

En l'absence de symétrie, une exploration pas à pas avec un incrément d'un degré sur les angles Ψ , Θ , Φ nécessite 3888000 fois le calcul de la vitesse. Avec un temps de calcul de l'ordre de la seconde, l'exploration complète dure environ 270 heures.

Compte tenu des symétries, les calculs effectués avec des écarts d'angles de 9° sur Ψ et de 3° sur Θ et Φ , correspondant à 12 000 configurations différentes, demandent 3 h 30 de calcul numérique.

1-4-3 - QUELQUES RESULTATS THEORIQUES

Nous présentons ici des résultats théoriques caractéristiques que nous comparons aux valeurs de A.J. SLOBODNIK (8) dans le cas de la coupe Y et des coupes à simple rotation AT et ST. Ces dernières sont définies par les valeurs suivantes :

- coupe AT : $\Phi = 0^\circ$ et $\Theta = 35^\circ 15'$

- coupe ST : $\Phi = 0^\circ$ et $\Theta = 42^\circ 30'$

Les figures 11, 12 et 13 représentent les courbes de variation de la vitesse de propagation en fonction de la direction de propagation (Ψ). A titre de comparaison, les points sur les courbes correspondent aux valeurs publiées par SLOBODNIK.

Nous pouvons remarquer le très bon accord entre les deux séries de résultats.

Les coefficients d'atténuation à l'intérieur du matériau permettent de savoir s'il y a dégénérescence ou non de l'onde de surface en onde de volume.

Dans la relation des composantes du déplacement u_k (I-21), apparaissent les termes d'amortissement $\frac{\omega_0}{V_0} b_r x_2$ $r = 1, 2, 3$.

En introduisant la longueur d'onde acoustique $\lambda = \frac{V_0}{f}$ où V est la vitesse de propagation et f la fréquence du signal, les termes de pénétration en profondeur deviennent :

$$2\pi b_r \frac{x_2}{\lambda}$$

I-45

Les figures 11b, 12b et 13b donnent le coefficient de pénétration de chacun des trois termes des composantes du déplacement à une profondeur $x_2 = -\lambda$, en fonction de la direction de propagation.

Pour les trois coupes considérées, il n'y a pas génération d'ondes de volume. Il faut cependant remarquer que l'un des modes est de 10 à 30 dB moins atténué que les deux autres.

D'un point de vue pratique, il est utile de connaître la direction du flux d'énergie qui permettra de prévoir un positionnement des transducteurs d'émission et de réception de l'onde, le plus approprié au transfert de l'énergie avec le minimum de déperdition.

Les figures 11c, 12c et 13c représentent les variations de la direction Φ' du flux d'énergie en fonction de la direction de propagation Ψ . Elles donnent également des renseignements sur les pertes d'insertion de la ligne à retard dues à la géométrie des transducteurs. Dans un article publié en 1973, T-L. SZABO et A.J. SLOBODNIK Jr (9) ont montré que la pente de l'angle Φ' du flux d'énergie ($\partial\Phi'/\partial\Psi$) permet d'estimer deux cas de pertes d'insertion :

- a) - les pertes d'insertion dues à un mauvais positionnement des transducteurs par rapport à la direction de mode pur choisie.
- b) - les pertes dues au phénomène de diffraction de l'onde qui crée un étalement du rayon de l'onde lorsque l'on s'éloigne du transducteur émetteur. La diffraction est directement reliée à la grandeur et au signe de la pente du flux d'énergie $\partial\Phi'/\partial\Psi$.

Il sera donc important que la valeur de Φ' et la pente de Φ' par rapport à la direction de propagation restent faibles pour obtenir un dispositif fonctionnant dans les meilleures conditions électriques et mécaniques.

Les figures 11c, 12c et 13c montrent les axes de modes purs pour les coupes Y, AT et ST, c'est-à-dire les directions de propagation pour lesquelles le vecteur de Poynting électromécanique reste co linéaire avec la direction $\vec{Ox_1}$

Coupe Y : $\Psi = 0^\circ$ pour une vitesse de phase $V_o = 3\,156\text{ m/s}$
 $\Psi = 90^\circ$ pour une vitesse de phase $V_o = 3\,812\text{ m/s}$

Coupe AT : $\Psi = 0^\circ$ ($V_o = 3\,150\text{ m/s}$) et $\Psi = 90^\circ$ ($V_o = 3\,512\text{ m/s}$)

Coupe ST : $\Psi = 0^\circ$ ($V_o = 3\,157\text{ m/s}$) et $\Psi = 90^\circ$ ($V_o = 3\,524\text{ m/s}$)
ainsi que $\Psi = 33^\circ$ et $\Psi = 39^\circ 40'$

Les valeurs repérées ont été calculées par SLOBODNIK.

Dans le cas du quartz, du fait de son faible coefficient de couplage, la correction piézoélectrique a été introduite par la méthode des constantes élastiques durcies.

Si cette méthode donne de bons résultats concernant la vitesse de propagation et la direction du flux d'énergie, elle ne permet pas le calcul du coefficient de couplage électromécanique. Ces valeurs ont été entièrement déterminées et publiées par J. HENAFF et M. FELDMANN (10) pour le quartz.

I-5 - ETUDE EXPERIMENTALE DES LIGNES A RETARD A ONDE DE RAYLEIGH

La génération et la détection des ondes de RAYLEIGH sont réalisées, pour des substrats piézoélectriques, au moyen des transducteurs interdigités métalliques déposés sur la surface de propagation (2) (3).

Une ligne à retard à onde de RAYLEIGH est constituée par deux systèmes de "peignes" interdigités. Les transducteurs assurent la conversion énergie électrique en énergie mécanique à l'entrée, puis, après propagation, la conversion inverse à la sortie (fig. 14).

La d.d.p. appliquée aux bornes de T_1 induit, par l'intermédiaire du champ électrique, une déformation élastique périodique qui engendre des ondes de RAYLEIGH dans le plan de la surface, ainsi que des ondes de volume indésirables à l'intérieur du matériau.

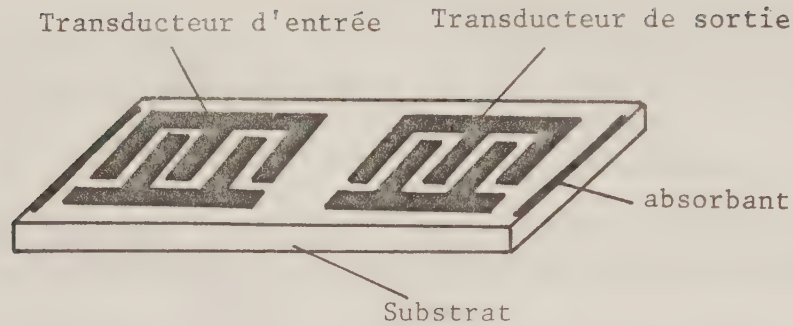


Fig. 14

Le transducteur étant bidirectionnel, les ondes de surface sont émises dans les deux directions opposées. Un absorbant élimine les ondes émises vers l'extérieur du substrat. L'autre partie de l'onde est détectée, après propagation, par le transducteur T_2 .

1-5-1 - REALISATION DES LIGNES

La fabrication de lignes à retard comporte diverses phases qui doivent être réalisées avec une très grande minutie, dans de bonnes conditions de propreté.

a) Masque

Le dispositif, utilisé pour la reproduction des transducteurs, que l'on appelle "masque", a été réalisé dans un laboratoire du C.N.E.T. à partir d'un schéma (fig. 15) que nous avons calculé pour obtenir une fréquence centrale de synchronisme f_0 de 100 MHz lorsque la vitesse de propagation de l'onde de RAYLEIGH V_0 est de 3 600 m/s.

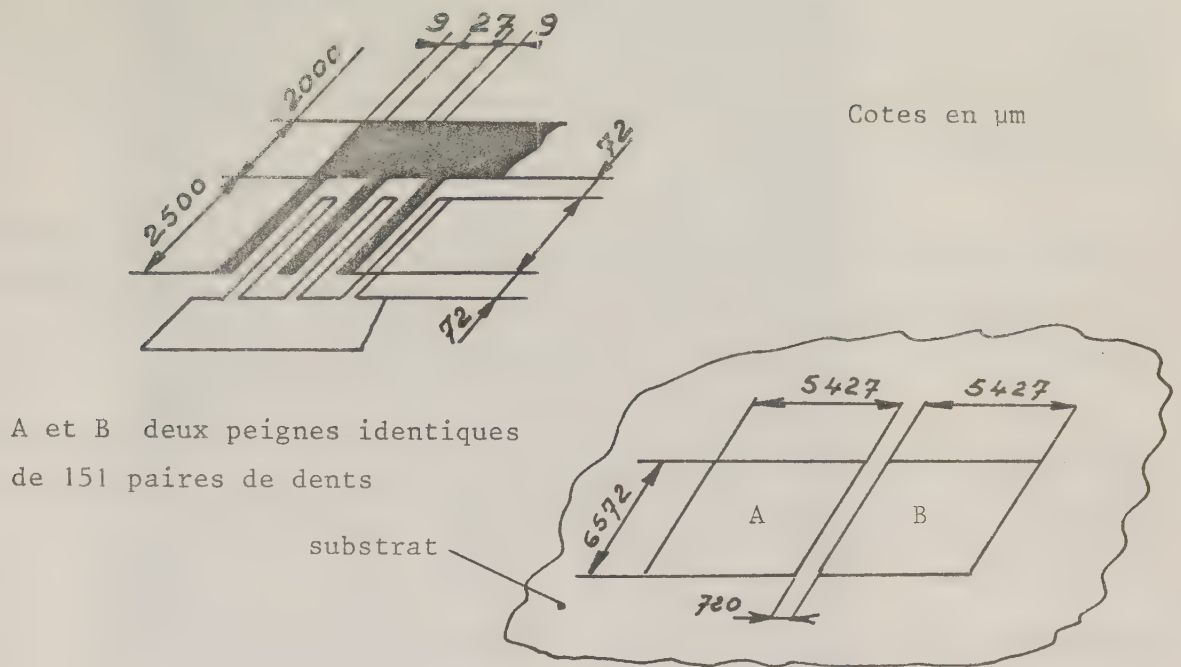


Fig. 15

La distance (d) entre les centres de deux doigts adjacents doit être égale à une demi-longueur d'onde ($\frac{\lambda_0}{2}$) pour qu'il y ait un effet cumulatif des vibrations émises.

La distance entre deux doigts consécutifs ayant le même potentiel est donc de $\lambda_0 = 36 \mu\text{m}$.

Le dispositif est un masque métallique au chrome qui présente une grande définition et une plus grande robustesse que certains masques réalisés à partir de gélatine photographique.

b) Transducteurs métallisés

Les lignes à retard que nous utilisons sont entièrement réalisées au Laboratoire.

Rappelons brièvement les diverses opérations que cette fabrication nécessite.

Dans un premier temps, les lames de quartz sont dégraissées, puis un nettoyage complet est fait dans une cuve à ultrasons. La métallisation est alors réalisée avec de l'aluminium. La couche déposée est de 500 Å environ.

Une sensibilisation photographique de la surface métallisée est faite avec un dépôt de résine photosensible (résine positive HZ 1350 H) de haute définition. Cette couche est séchée aux infrarouges pendant 10 à 15 minutes, ce qui polymérise la résine.

La plus délicate opération consiste à positionner le masque avec précision sur la lame de quartz métallisée. La précision de cette opération définit l'incertitude sur la direction de propagation de l'onde.

La couche de résine est soumise au rayonnement ultra-violet à travers le masque. Cette insolation entraîne sa dépolymérisation sauf dans les parties cachées par les transducteurs dessinés sur le masque.

Un premier contrôle optique est effectué après un développement qui enlève la résine dépolymérisée.

Après un rinçage, les parties non protégées sont attaquées avec un mélange d'acide orthophosphorique (80 %), d'acide nitrique (5 %) et d'eau.

Un contrôle optique de toute la surface est à nouveau effectué avec un microscope métallographique, après un long rinçage et la dissolution de la résine restante (solvant 1112A).

Mis à part la métallisation, toutes ces opérations sont réalisées dans une chambre blanche dont la température de 20°C est contrôlée à 1 degré près et dont le degré hygrométrique est de 45 % $\pm$ 5 %. Dans cette pièce, l'air est en surpression de 3 à 5 mm Hg par rapport à l'extérieur. Cette chambre "anti-poussière" est en classe 100 à la sortie des filtres, c'est-à-dire qu'elle est garantie pour ne contenir que 3,5 poussières d'un diamètre moyen de 0,5 μ par litre.

Les contacts électriques sont pris sur la ligne à retard par des fils de cuivre de 0,1 mm de diamètre, soudés sur les bords des transducteurs avec une pâte époxy à l'argent.

Cette ligne mise dans un boîtier est alors prête pour les tests électriques.

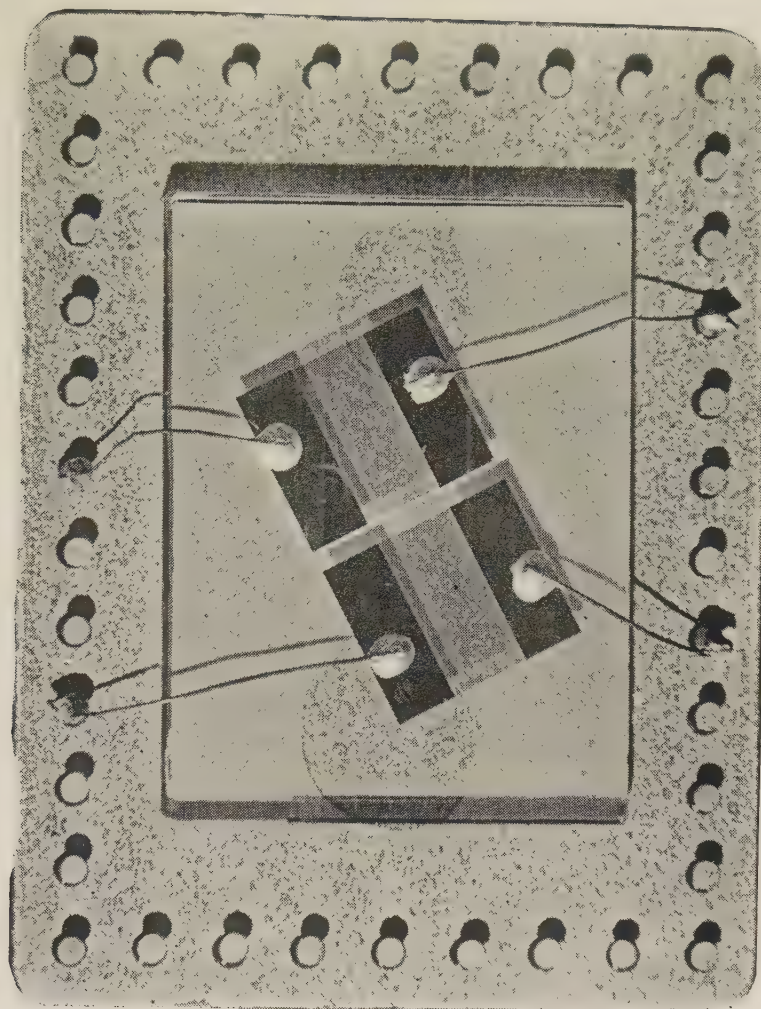


Photo 1 : Ligne à retard à onde de surface
(substrat de quartz)

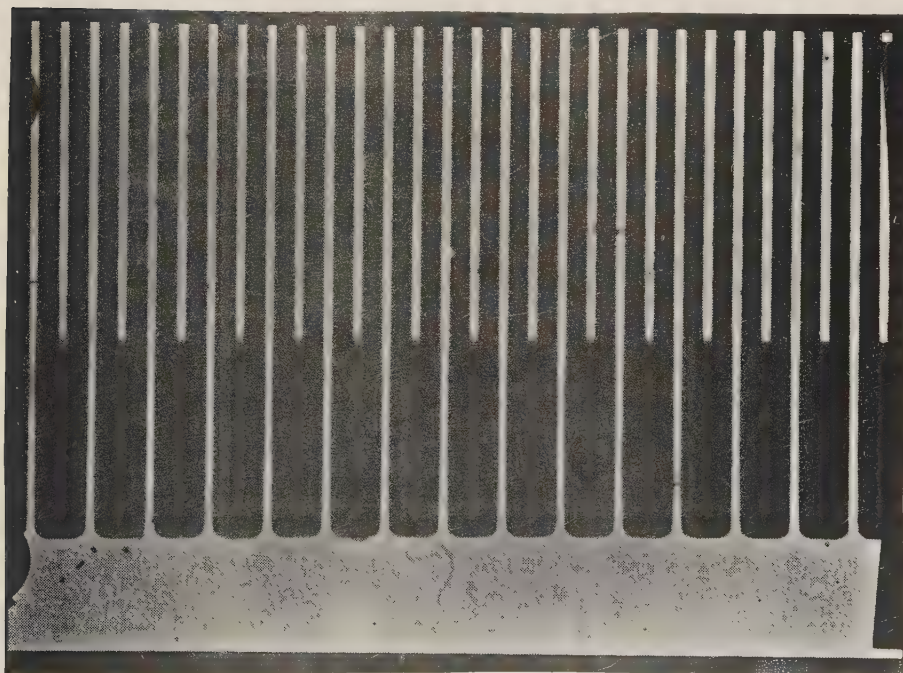


Photo 2 : Transducteur interdigité

D'un point de vue électrique, une ligne à retard à ondes de surface est un quadripôle passif dont la fréquence de synchronisme est comprise environ entre 30 MHz et 2 GHz.

Dans ces gammes de fréquences, les représentations matérielles classiques électriques (h_{ij} , z_{ij} , y_{ij}) des quadripôles ne présentent plus d'intérêt vis à vis des utilisations potentielles du dispositif. En effet, à très hautes fréquences, l'adaptation de puissance (donc d'impédance) joue un rôle essentiel lors de la connexion des éléments entre eux. Ceci a entraîné l'introduction de paramètres de dispersion (scattering) S_{ij} comme représentation matricielle de tels quadripôles.

Les paramètres de dispersion relient les signaux (E_R) qui sortent de chaque extrémité du quadripôle aux signaux (E_I) qui y pénètrent (fig. 16).

$$(E_{R_i}) = (S_{ij}) (E_{I_j})$$

I-46

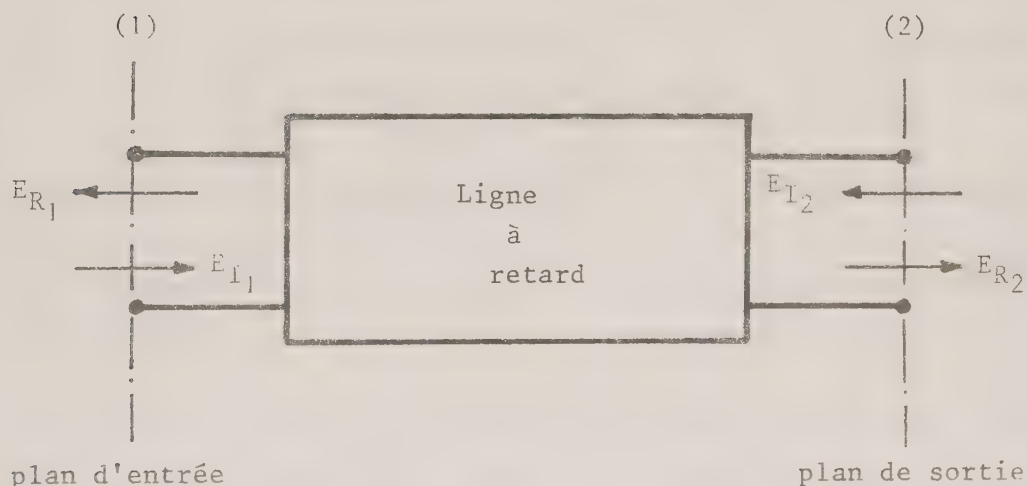


Fig. 16

En développant les matrices, il vient :

$$E_{R1} = S_{11} E_{I1} + S_{12} E_{I2}$$

$$E_{R2} = S_{21} E_{I1} + S_{22} E_{I2}$$

I-47

Les paramètres S_{11} et S_{22} représentent respectivement les coefficients de réflexion dans le plan d'entrée, la sortie étant adaptée ($E_{I_2} = 0$) et dans le plan de sortie, l'entrée étant adaptée ($E_{I_1} = 0$).

S_{12} et S_{21} sont les coefficients de transmission inverse et directe dans les mêmes conditions d'adaptation que précédemment.

Les paramètres S_{ij} sont des quantités complexes.

La représentation dans l'abaque de Smith de S_{11} fournit la valeur relative de l'impédance d'entrée Z_e par rapport à une impédance de charge "adaptée", qui est en général égale à 50Ω . De même Z_s est obtenue à partir de S_{22} .

Le coefficient S_{21} donne pour chaque fréquence l'atténuation de la ligne et son déphasage par rapport à une charge réelle : c'est la fonction de transfert directe.

Principe de la mesure

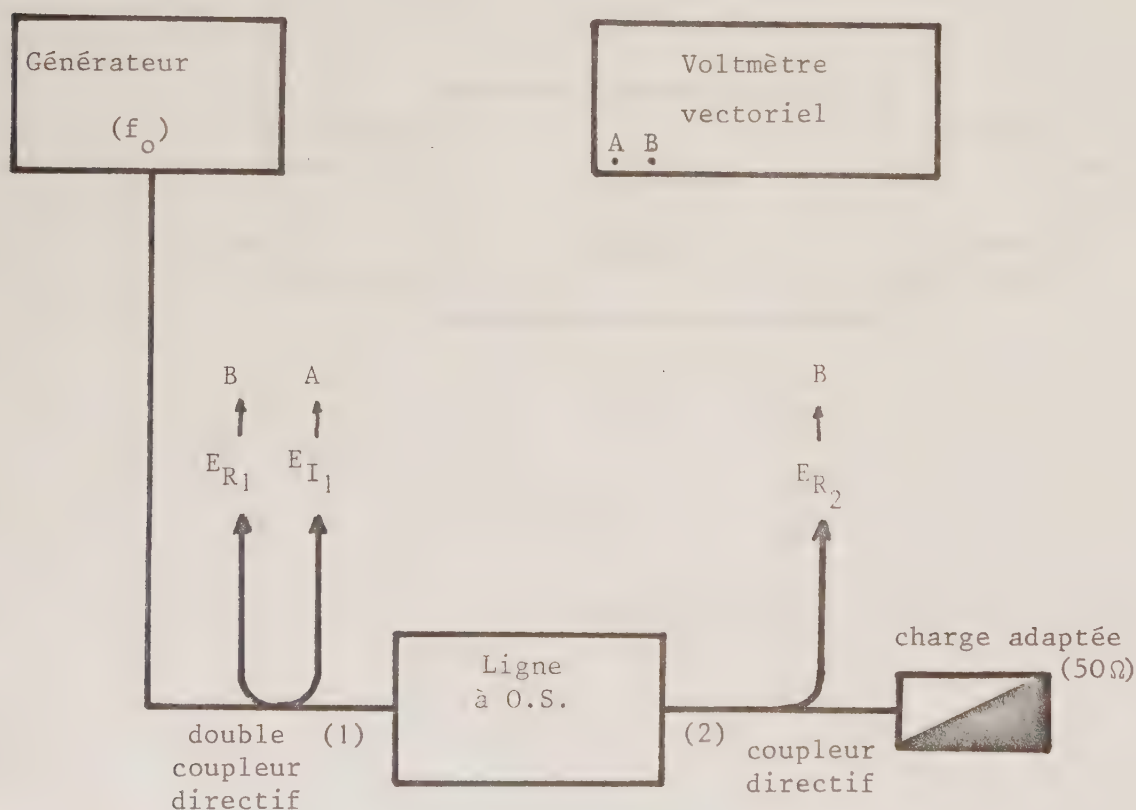


Fig. 17

Un générateur de fréquence stable (synthétiseur) envoie un signal dans la ligne à retard chargée sur son autre extrémité par une charge adaptée (50Ω).

La séparation des signaux incidents (E_{I_j}) et réfléchis (E_{R_i}) aux extrémités de la ligne est réalisée par des coupleurs directifs.

La mesure des paramètres S_{11} et S_{21} peut être faite point par point pour chaque fréquence avec un voltmètre vectoriel donnant, après un réglage préalable de niveau et de phase, les valeurs du rapport des tensions en module et en phase.

$$\left| \frac{E_{R_1}}{E_{I_1}} \right| \quad \text{et} \quad \phi_{R_1} - \phi_{I_1} \quad \text{donc} \quad S_{11}$$

$$\text{puis} \quad \left| \frac{E_{R_2}}{E_{I_1}} \right| \quad \text{et} \quad \phi_{R_2} - \phi_{I_1} \quad \text{qui est} \quad S_{21}$$

S_{22} et S_{12} sont obtenus en retournant la ligne à retard.

1-5-3 - RESULTATS ET COMPARAISONS AVEC LA THEORIE

Les mesures électriques faites sur les lignes à retard à onde de surface réalisées au Laboratoire nous permettent de vérifier la validité des prévisions théoriques et en particulier la valeur de la vitesse calculée préalablement.

Pour illustrer la méthode de mesure exposée précédemment, nous présentons des résultats complets sur une coupe à simple rotation :

Coupe ST ($\phi = 0^\circ$, $\theta = 42^\circ 30'$)

La propagation de l'onde a lieu suivant l'axe $\vec{Ox_1}$ ($\psi = 0^\circ 15'$).

Les figures 17 et 18 représentent la fonction de transfert S_{21} lorsque la fréquence varie entre 85,1 MHz et 89,7 MHz (dans un système d'axes rectangulaires).

COUPE (ST,X)
COURBES DE TRANSMISSION (S_{21})

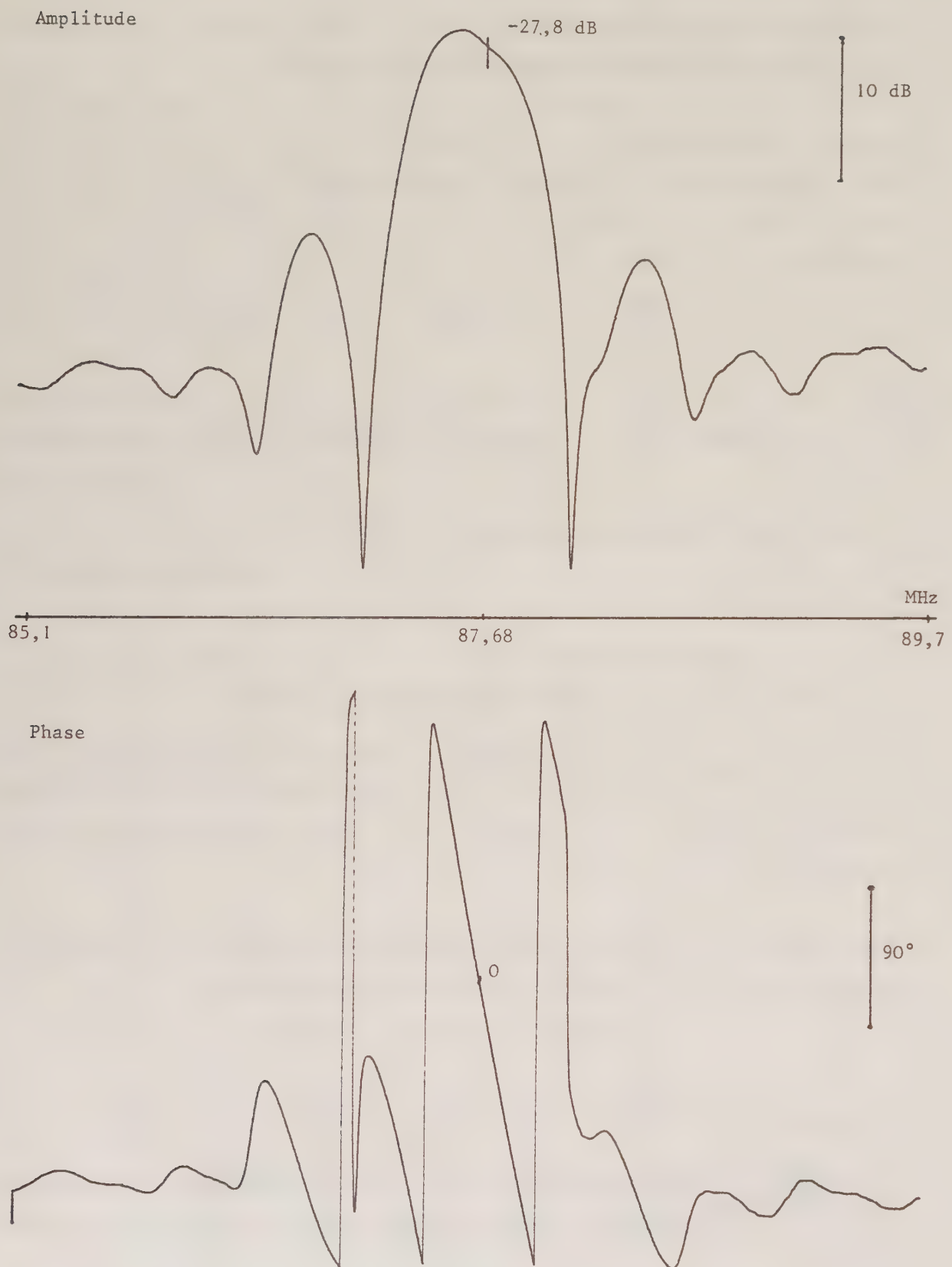


Fig. 18

COUPE (ST,X)

COEFFICIENTS DE REFLEXION S_{11} et S_{22}

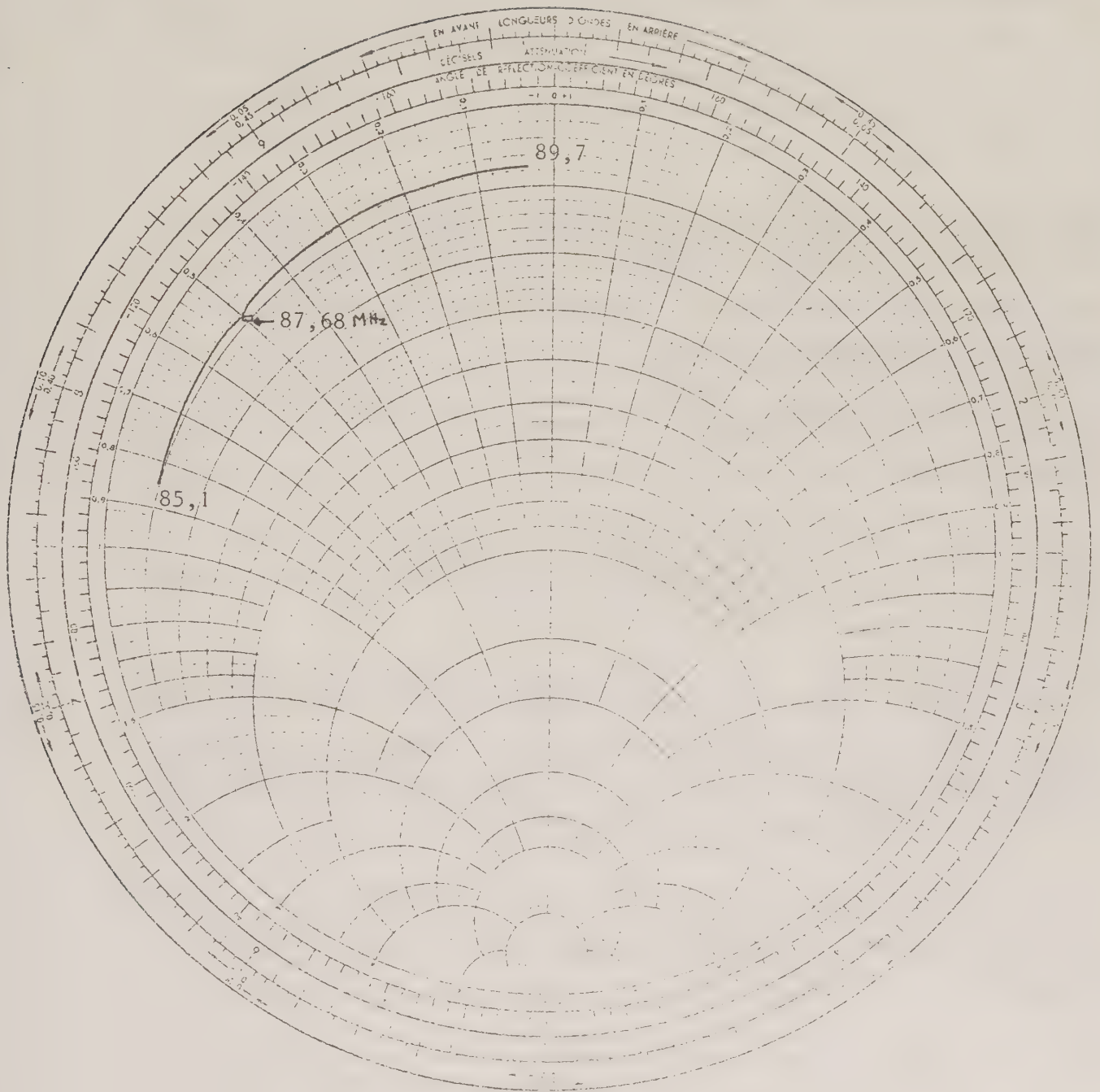


Fig. 19

Sur la figure 18, nous distinguons le lobe principal du mode de l'onde de RAYLEIGH, entouré de modes parasites atténués d'une vingtaine de dB. Dans le mode principal, l'atténuation de la ligne est de l'ordre de 28 dB. Cette atténuation correspond aux pertes d'insertion dans la ligne et est due :

- à l'atténuation de l'onde au cours de la propagation
- aux pertes dans le milieu adjacent
- aux pertes de dispersion liées à la géométrie des transducteurs
- et à la plus ou moins bonne qualité du transducteur (conduction et excitation d'ondes de volumes, facteur de conversion mécanique - électrique).

Cette atténuation pour les meilleures lignes de coupe ST réalisées est de l'ordre de 17 dB ; elle peut augmenter jusqu'à 28 dB lorsque le transducteur est de moins bonne qualité, en gardant des caractéristiques utilisables dans nos réalisations pratiques.

La figure 18 représente la courbe de déphasage en fonction de la fréquence de la ligne dans la même gamme de fréquence.

L'évolution des coefficients de réflexion à l'entrée et à la sortie de la ligne : S_{11} et S_{22} , est représentée sur la figure 19 (S_{22} étant identique à S_{11} car la ligne est symétrique et réciproque).

La représentation polaire de l'abaque de Smith permet d'obtenir par une lecture directe les valeurs des impédances normalisées z_e et z_s en fonction de la fréquence. Les valeurs Z_e et Z_s sont calculées en multipliant z_e et z_s par l'impédance de référence Z_i égale à 50 Ω .

Le tableau II résume les grandeurs électriques de cette ligne à sa fréquence de synchronisme f_0 qui est égale à 87,68 MHz et qui correspond à un déphasage nul.

Att (dB)	S_{11}	Z_e (Ω)	S_{22}	Z_s (Ω)
- 27,8	-1,3 dB - 126°	5-j25	-1,3 dB - 126 °	5-j25

Tableau II

Les impédances d'entrée et de sortie de la ligne sont capacitives.

Leur nature correspond bien aux prévisions théoriques à partir du schéma équivalent de MASON (11), développées par un transducteur interdigité par SMITH, GERARD, COLLINS, REEDER et SHAW en 1969 (12). Ils ont en effet calculé le schéma équivalent de tels transducteurs en mettant en évidence la capacité totale C_T des doigts.

Vitesse de propagation

La mesure de la fréquence de synchronisme de la ligne à retard effectuée avec l'analyseur de réseau permet de calculer la valeur de la vitesse V_o de l'onde.

En effet, la valeur V_o est obtenue à partir de la fréquence f_o , la distance $2d$ entre deux dents consécutives au même potentiel étant égale à $36 \mu\text{m}$.

On peut donc écrire :

$$2d = \frac{V_o}{f_o} = \frac{V_m}{f_m} = 36.10^{-6} \text{ m}$$

La vitesse mesurée V_m est égale à 36.10^{-6} fois la fréquence de synchronisme.

Le tableau III montre la comparaison entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées pour des lignes à retard, toutes réalisées au Laboratoire, à partir de coupes de quartz à simple ou à double rotation.

Les lames de quartz de coupe à double rotation nous ont été fournies par la Société QUARTZ et ELECTRONIQUE avec une précision sur les angles Φ et Θ de l'ordre de $20''$ d'arc. Cette précision est beaucoup plus grande que pour l'angle Ψ qui est de quelques minutes.

	Φ	Θ	Ψ	f_m MHz	$V_{\text{mesurée}}$ m/s	$V_{\text{théorique}}$ m/s
ST, X	0°	$42^\circ 30'$	0°	87,68	3156,5	3156,7
AT, X	0°	$35^\circ 15'$	0°	87,50	3150,0	3150,2
Coupe FST	Φ_0	Θ_0	Ψ_0	99,70	3589,2	3589,2

Tableau III

La coupe FST est définie au chapitre III. D'autres mesures effectuées en changeant les valeurs des angles Φ , Θ ou Ψ donnent des valeurs de la vitesse en accord avec les résultats théoriques.

L'incertitude de mesure de la valeur de la fréquence f_m due à la méthode peut être estimée à quelques kilohertz.

La valeur de la vitesse de phase de l'onde est ainsi appréciée avec une incertitude de $\pm 0,2$ m/s, soit une précision relative d'environ $6 \cdot 10^{-5}$.

Même si cette mesure paraît assez grossière, comparée aux précisions habituelles de mesure de fréquence, elle nous permet de contrôler de façon rapide la validité des résultats issus des calculs théoriques.

En particulier, dans les applications des lignes à retard, un certain nombre d'effets modifient les caractéristiques des ondes de RAYLEIGH. Les perturbations externes causées par leur environnement n'apparaissent pas dans le modèle linéaire, de même que les effets de variation de l'énergie transmise dans la ligne.

CHAPITRE II

PROPAGATION D'UNE ONDE DE SURFACE

EN RÉGIME NON LINÉAIRE

-oOo-

Les relations de l'élasticité linéaire ont permis de décrire les propriétés de l'onde de RAYLEIGH se propageant sur un solide supposé parfait lorsque l'amplitude des vibrations est supposée être infiniment petite. De façon générale, un solide est soumis à des perturbations extérieures d'origines diverses, par exemple mécaniques ou thermiques, qui créent des modifications de ses caractéristiques. Les effets non linéaires du cristal produisent un couplage entre la déformation due à la perturbation et l'onde qui se propage. Il en résulte une variation de la vitesse de propagation. (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19).

Nous nous proposons dans ce chapitre de rappeler les équations générales non linéaires de l'élasticité et de les appliquer au cas de la propagation en milieu soumis à une perturbation statique ou quasistatique. Nous montrerons que les équations d'équilibre font apparaître des coefficients élastiques modifiés qualifiant le couplage onde-perturbation. Puis nous proposerons deux méthodes de résolution, l'une variationnelle, l'autre de perturbation que nous appliquerons au cas des ondes de RAYLEIGH.

II-1 - RAPPEL DES EQUATIONS GENERALES NON LINEAIRES

Un cristal soumis à une déformation statique due à des effets extérieurs agissant sur la surface ou dans le volume, voit ses propriétés élastiques modifiées. Cette modification résulte d'une façon générale d'un couplage non linéaire ; les non linéarités sont introduites par des considérations géométriques et énergétiques.

Nous allons tout d'abord rappeler les définitions des déformations et des efforts et donner les relations d'équilibre dans le cas de déformations finies prenant en compte les propriétés non linéaires. Nous utiliserons la notation tensorielle employée par THURSTON (13).

II-1-1 - DEPLACEMENTS

La définition introduite dans le chapitre précédent reste valable. Les composantes u_i des déplacements mécaniques s'écrivent

$$\boxed{u_i = x_i - a_i} \quad \text{II-1}$$

où x_i et a_i sont les coordonnées d'un point matériel dans l'état initial et dans l'état final.

II-1-2 - DEFORMATIONS

De la même façon, on considère deux points voisins $M(a_i)$ et $M'(a_i + da_i)$. La distance $\overline{MM'}$ entre ces deux points dans l'état initial est donnée par :

$$\overline{MM'}^2 = ds_0^2 = da_i da_i$$

Dans l'état final, M s'est déplacé en $P(x_i)$ et M' en $P'(x_i + dx_i)$. La distance de P à P' est alors $\overline{PP'}^2 = ds^2 = dx_i dx_i$.

La déformation du cristal est représentée par :

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2} \quad \text{II-2}$$

Les composantes η_{ij} de cette déformation sont données par la relation suivante

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{dx_k dx_k - da_k da_k}{da_i da_j} \quad \text{II-3}$$

En introduisant les déplacements u_i , nous pouvons écrire les composantes de la déformation suivant la forme :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \quad \text{II-4}$$

Remarquons que la déformation est écrite en fonction de la variable d'espace a_i ; elle est donc exprimée dans l'état initial.

Les termes de la forme $\frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j}$ sont non linéaires et du 3e ordre (l'ordre est en général défini par rapport à l'énergie).

Les composantes de la déformation peuvent également être exprimées dans l'état final. Nous les noterons ϵ_{ij}

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad \text{II-5}$$

Relations entre η_{ij} et ϵ_{ij}

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \eta_{kl} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_l}{\partial x_j} \\ \eta_{ij} &= \epsilon_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_l}{\partial a_j} \end{aligned} \quad \text{II-6}$$

II-1-3 - EFFORTS

On appelle T_{ij} les efforts définis par unité de surface *du milieu déformé* (supposé sans terme de dissipation). Ce sont donc les efforts de l'état final.

On appelle tensions thermodynamiques t_{ij} les quantités obtenues en dérivant l'énergie interne par rapport aux composantes de la déformation.

L'énergie interne dU est la différentielle du travail par unité de volume initial

$$dU = t_{ij} d\eta_{ij} \quad \text{II-7}$$

Introduisons ici le jacobien des déformations :

$$J = \left| \frac{x_1 x_2 x_3}{a_1 a_2 a_3} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix}$$

Le déterminant de J est égal au rapport de la masse spécifique dans l'état initial ρ_0 à la masse spécifique dans l'état final ρ .

$$\boxed{\det J = \frac{\rho_0}{\rho}} \quad \text{II-8}$$

Cette relation correspond à la loi de conservation de la masse.

Les tensions thermodynamiques t_{ij} sont alors reliées aux efforts T_{kl} à l'état final par la relation suivante :

$$t_{ij} = \det J \cdot T_{kl} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial a_j}{\partial x_l} \quad \text{II-9}$$

qui peut aussi s'écrire inversement :

$$T_{ij} = \frac{1}{\det J} \cdot t_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_l} \quad \text{II-10}$$

Relation effort - déformation

L'énergie élastique peut s'écrire sous la forme d'un développement limité d'ordre n fonction des déformations η_{ij} .

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl}^S \eta_{ij} \eta_{kl} + \frac{1}{6} C_{ijklmn}^S \eta_{ij} \eta_{kl} \eta_{mn} + \dots + \frac{1}{n!} C_{ij\dots uv}^S \eta_{ij} \dots \eta_{uv}$$

où C_{ijk}^S , C_{ijklmn}^S , ... et $C_{ij\dots uv}^S$ sont respectivement les coefficients élastiques du 2ème, 3ème, ... et nième ordre définis à entropie constante.

A partir de la relation (II-7), les tensions thermodynamiques s'expriment sous forme d'un polynome des puissances croissantes des déformations.

$$t_{ij} = C_{ijkl}^S \eta_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijklmn}^S \eta_{kl} \eta_{mn} + \dots \quad \text{II-11}$$

II-1-4 - EQUATIONS D'EQUILIBRE

Soient $F_i(x_\ell)$ les forces de volume et $Q_i(x_\ell)$ les forces de surface (par unité de volume et de surface de l'état final). Appelons T_{ji} les efforts définis dans l'état final (un état déformé) et P_{ji} les efforts définis dans l'état initial. $Q_i(n_\ell) = n_j T_{ji}$.

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\iint_{\Sigma} Q_i d\Sigma + \iiint_V F_i dV = 0$$

soit encore :

$$\iint_{\Sigma} n_j T_{ji} d\Sigma + \iiint_V F_i dV = 0$$

et par application de la formule d'OSTROGRADSKI :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + F_i \right) dV = 0$$

Cette notation doit être vraie quel que soit l'élément de volume V considéré, donc :

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + F_i(x_\ell) = 0$$

En régime dynamique, on peut sortir de F_i la force d'inertie $\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2}$. L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = F_i(x_\ell) + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \quad \text{II-12}$$

L'équation d'équilibre est ici exprimée dans l'état final. Cherchons la même relation dans l'état initial.

Précisons tout d'abord qu'un élément de surface $d\Sigma$ peut s'écrire en utilisant une notation à simple indice ou à double indice.

Dans la notation à simple indice, $d\Sigma_i$, "i" se rapporte à la direction de l'axe perpendiculaire à l'élément de surface considéré.

La relation entre les efforts T_{ji} et P_{ji} correspondant respectivement à l'état final et à l'état initial s'écrit :

$$P_{ji} d\Sigma_i^0 = T_{ji} d\Sigma_i \quad \text{II-13}$$

où $d\Sigma_i^0$ et $d\Sigma_i$ correspondent respectivement aux éléments de surface des états initial et final.

Dans la notation à double indice, $d\Sigma_{ij}$, "i" et "j" se rapportent aux deux axes parallèles à la surface. Ainsi $d\Sigma_{ij}^0 = da_i da_j$ et $d\Sigma_{ij} = dx_i dx_j$. Il en est de même pour les efforts qui dans ce cas sont exprimés avec trois indices.

La relation (II-13) prend la forme suivante :

$$P_{\ell}^{ji} d\Sigma_{ji}^0 = T_{\ell}^{ji} d\Sigma_{ji} \quad \text{II-14}$$

Soit $A_{k\ell}^{ji}$ le mineur du jacobien des déformations J. Ce dernier permet de relier les éléments de surface dans les deux états, soit :

$$d\Sigma_{ji} = A_{k\ell}^{ji} d\Sigma_{k\ell}^0 \quad \text{II-15}$$

En notation à double indice, la relation (I-10) devient :

$$T_{\ell}^{ji} = \frac{1}{\det J} \frac{\partial x_{\ell}}{\partial a_r} \frac{\partial x_{ji}}{\partial a_{pq}} t_r^{pq} \quad \text{II-16}$$

Les variables d'espace, x_i et a_i , représentées avec deux indices, sont définies par les axes perpendiculaires correspondant aux deux indices.

$$T_{\ell}^{ji} d\Sigma_{ji} = \frac{1}{\det J} \frac{\partial x_{\ell}}{\partial a_r} \frac{\partial x_{ji}}{\partial a_{pq}} t_{r}^{pq} A_{kl}^{ji} d\Sigma_{kl}^o$$

avec

$$\frac{1}{\det J} \frac{\partial x_{ji}}{\partial a_{pq}} A_{kl}^{ji} = \delta_{pq}^{kl}$$

alors

$$T_{\ell}^{ji} d\Sigma_{ji} = \frac{\partial x_{\ell}}{\partial a_r} t_{r}^{pq} d\Sigma_{pq}^o = P_{\ell}^{ji} d\Sigma_{pq}^o$$

En revenant à la notation à simple indice, on montre que :

$$P_{ji} = \frac{\partial x_i}{\partial a_r} t_{jr}$$

II-17

P_{ij} est souvent appelé second tenseur de Piola-Kirchoff.

Partant de l'équation d'équilibre dans l'état final (II-12), et en introduisant la relation (II-10) donnant T_{ji} , il vient :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = F_i(x_{\ell}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\det J} \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \frac{\partial x_i}{\partial a_{\ell}} t_{kl} \right)$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\det J} \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = F_i(x_{\ell}) + \frac{1}{\det J} \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_{\ell}} t_{kl} \right)$$

L'équation d'équilibre dans l'état initial s'écrit alors :

$$\rho_o \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \det J \cdot F_i(x_{\ell}) + \frac{\partial P_{ki}}{\partial a_k}$$

II-18

Les conditions aux limites associées à cette équation expriment que la surface du milieu non déformé est libre :

$$n_k P_{ki} = 0$$

II-19

RECAPITULATION DES PRINCIPALES RELATIONS

Déplacements :

$$u_i = x_i - a_i \quad \text{II-20}$$

Déformations :

$$\text{état initial : } \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \quad \text{II-21}$$

$$\text{état final : } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad \text{II-22}$$

Tensions thermodynamiques :

$$t_{ij} = \det J \cdot T_{kl} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial a_j}{\partial x_l} \quad \text{II-23}$$

Tenseur de Piola-Kirchoff :

$$P_{ji} = \frac{\partial x_i}{\partial a_r} t_{jr} \quad \text{II-24}$$

Relation effort-déformation :

$$t_{ij} = C_{ijkl}^S \eta_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijklmn}^S \eta_{kl} \eta_{mn} + \dots \quad \text{II-25}$$

Equations d'équilibre :

$$\text{état initial : } \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \det J \cdot F_i(x_\ell) + \frac{\partial P_{ki}}{\partial a_k} \quad \text{II-26}$$

$$\text{état final : } \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = F_i(x_\ell) + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \quad \text{II-27}$$

II-2 - PROPAGATION DANS UN MILIEU PREDEFORME

Nous utilisons les relations de THURSTON (13) qui avaient été introduites dans le cas d'une onde de volume se propageant dans un milieu soumis à une pression hydrostatique. Les mesures de sa vitesse permettaient de déduire les valeurs des coefficients élastiques non linéaires du 3e ordre.

Dans les développements suivants nous généralisons cette théorie en introduisant les forces de volume et nous appliquerons les expressions très générales ainsi obtenues au cas des ondes de surface.

Lorsqu'un cristal est soumis à une précontrainte statique à laquelle on superpose une déformation dynamique, trois états successifs du cristal sont à considérer.

L'état naturel est celui qui précède l'application de toute contrainte et déformation. Ce cristal est au repos. Soient a_i les coordonnées correspondantes d'un point matériel.

L'état initial est obtenu après déformation sous l'action d'une précontrainte statique ou quasistatique. Les coordonnées sont appelées x_i .

L'état final dans lequel une déformation dynamique (vibration) vient se superposer à la précontrainte statique sera défini par les coordonnées X_i .

Dans ce qui va suivre, nous n'introduisons pas les termes tenant compte de la piézoélectricité, leur influence étant négligeable dans le cas du quartz.

II-2-1 - DEFINITIONS

Déplacements

déplacements statiques	:	$\overline{u_i} = x_i - a_i$
déplacements dynamiques	:	$u_i = X_i - x_i$
déplacements totaux	:	$u_i^* = X_i - a_i = \overline{u_i} + u_i$

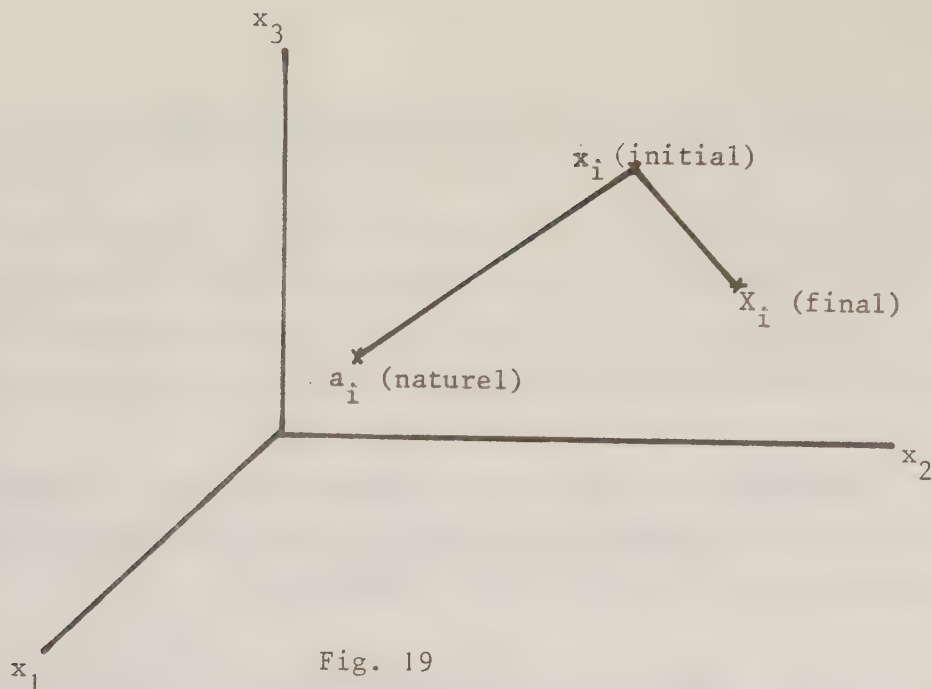


Fig. 19

Masses spécifiques

A chacun des états correspond une masse spécifique

ρ_0 dans l'état naturel

$\bar{\rho}$ dans l'état initial

ρ dans l'état final

Efforts

Les efforts statiques sont notés $\overline{T_{ji}}$.

Soient T_{ji}^* les efforts totaux.

D'après la relation (II-10), T_{ji}^* s'exprime en fonction des tensions thermodynamiques par la formule :

$$T_{ji}^* = \frac{1}{\det J} \frac{\partial X_j}{\partial a_k} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} t_{km}^*$$

Les coefficients non linéaires du 3e ordre sont introduits par la relation (II-11) tensions thermodynamiques-déformations

$$t_{kp}^* = C_{pk\ell q} \eta_{\ell q}^* + \frac{1}{2} C_{pk\ell quv} \eta_{\ell q}^* \eta_{uv}^*$$

Les effets non linéaires correspondant au 4e ordre ou à des ordres plus élevés sont négligeables dans ce type de couplage et dans la suite tous les développements seront limités aux termes du 3e ordre.

Remarque : Cette approximation est tout à fait justifiée car, expérimentalement, l'influence des coefficients du 4e ordre n'a jamais été mise en évidence par ce type de couplage. Il n'en est pas de même dans le cas d'interactions mutuelles entre ondes car pour ces dernières, les coefficients du 4e ordre jouent un rôle équivalent à celui des coefficients du 3e ordre.

II-2-2 - EQUATIONS D'EQUILIBRE

D'après la relation (II-27), l'équation d'équilibre exprimée dans l'état final est :

$$\rho \frac{d^2 u_i^*}{dt^2} = F_i(X_\ell) + \frac{\partial T_{ji}^*}{\partial X_j} \quad \text{II-28}$$

En utilisant (II-26), cette relation exprimée dans l'état naturel devient :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} = \det J \cdot F_i(X_\ell) + \frac{\partial P_{ki}^*}{\partial a_k} \quad \text{II-29}$$

et dans l'état initial :

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} = \frac{\det J}{\det \bar{J}} F_i(X_\ell) + \frac{\partial K_{ij}^*}{\partial x_j} \quad \text{II-30}$$

avec :

$$\det J = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad \det \bar{J} = \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \quad \text{et} \quad K_{ij}^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \frac{\partial x_j}{\partial a_s} P_{is}^*$$

Le tenseur de Piola-Kirchoff P_{ki}^* qui est l'effort total défini dans l'état naturel mis en jeu lors du passage de l'état naturel à l'état final du solide est fonction du gradient des déformations totales $\frac{\partial X_j}{\partial a_m}$ et donc de la quantité $(\frac{\partial x_j}{\partial a_m} + \frac{\partial u_j}{\partial a_m})$.

$$P_{ki}^* \left(\frac{\partial X_j}{\partial a_m} \right) = P_{ki}^* \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_m} + \frac{\partial u_j}{\partial a_m} \right)$$

En développant en série, limitée aux deux premiers termes, P_{ki}^* autour de la valeur du gradient des déplacements statiques, il vient :

$$P_{ki}^* \left(\frac{\partial X_j}{\partial a_m} \right) = P_{ki}^* \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_m} \right) + \frac{\partial u_j}{\partial a_m} \frac{\partial P_{ki}^* \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_m} \right)}{\partial \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_m} \right)} + \dots$$

Ceci suppose que les déformations dynamiques restent petites devant les déformations statiques, condition qui peut toujours être réalisée en pratique.

En remarquant que la quantité $P_{ki}^* \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_m} \right)$ est le tenseur de Piola-Kirchoff $\overline{P_{ki}}$ défini lors du passage de l'état naturel à l'état initial, il s'ensuit que :

$$P_{ki}^* \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_m} \right) = \overline{P_{ki}} + \frac{\partial u_j}{\partial a_m} \frac{\partial \overline{P_{ki}}}{\partial \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_m} \right)} + \dots$$

Introduisons un nouveau tenseur : $\overline{A_{ikjm}}$

$$\overline{A_{ikjm}} = \frac{\partial \overline{P_{ki}}}{\partial \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_m} \right)} \quad \text{II-31}$$

Le tenseur de Piola-Kirchoff devient :

$$P_{ki}^* \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_m} \right) = \overline{P_{ki}} + \overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial a_m} + \dots$$

En reportant cette dernière relation dans l'équation d'équilibre de l'état naturel, nous obtenons :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} = \det J \cdot F_i(X_\ell) + \frac{\partial \overline{P_{ki}}}{\partial a_k} + \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial a_m} \right) \quad \text{II-32}$$

De la même façon, la relation d'équilibre pour les déplacements statiques $\overline{u_i}$ s'écrit dans l'état naturel :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial t^2} = \det \overline{J} \cdot F_i(x_\ell) + \frac{\partial \overline{P_{ki}}}{\partial a_k} \quad \text{II-33}$$

$$\text{Comme } u_i^* = \overline{u_i} + u_i, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 (\overline{u_i} + u_i)}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Compte tenu des équations (II-32) et (II-33), l'équation d'équilibre de la déformation dynamique s'exprime par :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \det J \cdot F_i(X_\ell) - \det \bar{J} \cdot F_i(x_\ell) + \frac{\partial}{\partial a_k} (\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial a_m}) \quad \text{II-34}$$

Cas particulier :

Si les forces de volume sont dues à des accélérations constantes indépendantes des déformations, on peut écrire :

$$F_i(X_\ell) = \rho g \quad \text{et} \quad F_i(x_\ell) = \bar{\rho} g \quad g : \text{accélération de la pesanteur}$$

$$\text{alors} \quad \det J F_i(X_\ell) - \det \bar{J} F_i(x_\ell) = 0$$

l'équation d'équilibre devient :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial a_k} (\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial a_m})} \quad \text{II-35}$$

Les relations (II-34) et (II-35) sont exprimées dans l'état naturel. Il peut être parfois utile de les exprimer aussi dans l'état initial. Partons de la relation (II-34) :

$$\frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \det J F_i(X_\ell) - \det \bar{J} F_i(x_\ell) + \frac{\partial x_s}{\partial a_k} \frac{\partial}{\partial x_s} (\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial x_r}{\partial a_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_r})$$

$$\text{Soit} \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\det J}{\det \bar{J}} F_i(X_\ell) - F_i(x_\ell) + \frac{\partial}{\partial x_s} (\frac{1}{\det \bar{J}} \frac{\partial x_s}{\partial a_k} \frac{\partial x_r}{\partial a_m} \overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial x_r})$$

$$\text{En posant} \quad \overline{B_{isjr}} = \frac{1}{\det \bar{J}} \frac{\partial x_s}{\partial a_k} \frac{\partial x_r}{\partial a_m} \overline{A_{ikjm}} \quad \text{II-36}$$

l'équation d'équilibre se rapportant aux déplacements dynamiques s'écrit donc dans l'état initial :

$$\overline{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \overline{\rho} F_i(X_\ell) - F_i(x_\ell) + \frac{\partial}{\partial x_s} (\overline{B_{isjr}} \frac{\partial u_j}{\partial x_r}) \quad \text{II-37}$$

Dans le cas particulier des forces de volume s'annulant, cette relation devient :

$$\boxed{\overline{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_s} (\overline{B_{isjr}} \frac{\partial u_j}{\partial x_r})} \quad \text{II-38}$$

Remarquons que les relations (II-35) et (II-38) sont équivalentes et correspondent respectivement à la description de la propagation dans un repère Lagrangien ou dans un repère Eulerien.

II-2-3 - LINEARISATION DES COEFFICIENTS ELASTIQUES MODIFIES

Linéarisation de $\overline{A_{ikjm}}$:

Repartons de l'expression de $\overline{A_{ikjm}}$ (II-31) et du tenseur de Piola-Kirchoff exprimé dans l'état initial :

$$\overline{A_{ikjm}} = \frac{\partial \overline{P_{ki}}}{\partial (\frac{j}{\partial a_m})} \quad \text{avec} \quad \overline{P_{ki}} = \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \overline{t_{kp}}$$

$$\overline{A_{ikjm}} = \frac{\frac{\partial x_i}{\partial a_p}}{\frac{\partial (\frac{j}{\partial a_m})}{\partial x_i}} \overline{t_{kp}} + \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial \overline{t_{kp}}}{\partial (\frac{j}{\partial a_m})} \quad \text{II-39}$$

D'après la relation (II-3) :

$$\overline{\eta_{\ell q}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_\ell} \frac{\partial x_k}{\partial a_q} - \delta_{\ell q} \right)$$

donc :

$$\frac{\partial \overline{\eta_{\ell q}}}{\partial (\frac{j}{\partial a_m})} = \frac{\partial x_j}{\partial a_q}$$

L'expression de $\overline{A_{ikjm}}$ devient en introduisant l'expression de la tension thermodynamique :

$$\overline{A_{ikjm}} = \delta_{ij} \overline{t_{km}} + \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_j}{\partial a_q} (C_{pkqm} + C_{pkqmu\nu} \overline{\eta_{uv}}) \quad \text{II-40}$$

Cette expression peut être réduite en utilisant les relations

$$x_i = a_i + \overline{u_i} \quad \text{et} \quad \overline{t_{jm}} = \det \overline{J} \overline{T_{sr}} \frac{\partial a_j}{\partial x_s} \frac{\partial a_m}{\partial x_r}$$

$\overline{A_{ikjm}}$ prend la forme :

$$\boxed{\overline{A_{ikjm}} = \delta_{ij} \overline{T_{km}} + C_{ikjm} + C_{ikjmu\nu} \overline{\eta_{uv}} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial a_p} C_{pkjm} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial a_q} C_{ikqm}} \quad \text{II-41}$$

Expression des " $\overline{B_{isjr}}$ "

Rappelons que $\overline{B_{isjr}} = \frac{1}{\det \overline{J}} \frac{\partial x_s}{\partial a_k} \frac{\partial x_r}{\partial a_m} \overline{A_{ikjm}}$ que l'on peut écrire

à partir de l'expression de $\overline{A_{ikjm}}$:

$$\overline{B_{isjr}} = \delta_{ij} \overline{T_{sr}} + \overline{C_{isjr}} + \overline{H_{isjr}} \quad \text{II-42}$$

$$\text{avec} \quad \overline{C_{isjr}} = \frac{1}{\det \overline{J}} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_s}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_q} \frac{\partial x_r}{\partial a_m} C_{pkqm}$$

$$\overline{H_{isjr}} = \frac{1}{\det \overline{J}} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_s}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_q} \frac{\partial x_r}{\partial a_m} C_{pkqmu\nu} \overline{\eta_{uv}}$$

De la même façon que pour $\overline{A_{ikjm}}$, nous pouvons exprimer $\overline{C_{isjr}}$ et $\overline{H_{isjr}}$ au premier ordre des contraintes statiques :

$$\overline{C_{isjr}} = \frac{1}{\det \overline{J}} (C_{isjr} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial a_p} C_{psjr} + \frac{\partial \overline{u_s}}{\partial a_k} C_{ikjr} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial a_q} C_{isqr} + \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial a_m} C_{isjm})$$

$$\overline{H_{isjr}} = \frac{1}{\det \overline{J}} C_{isjr\nu\mu} \overline{\eta_{uv}} \quad \text{II-43}$$

Ces relations permettent maintenant d'étudier l'effet de la prédéformation utilisant les coefficients statiques soit dans l'état naturel en $\overline{A_{ikjm}}$, soit dans l'état initial avec $\overline{B_{isjr}}$.

Nous allons montrer qu'il est possible de déterminer l'effet des perturbations extérieures au solide cristallin par deux méthodes différentes suivant les hypothèses que l'on peut faire sur la nature de ces perturbations.

II-3 - METHODE VARIATIONNELLE

Une méthode variationnelle pourra être utilisée pour déterminer les effets de l'environnement du milieu cristallin dans les cas où la "précontrainte" conduit à un couplage qui reste homogène dans tout le substrat, même si la perturbation est importante (5). Nous distinguerons deux types de modifications dont les traitements seront mathématiquement différents.

II-3-1 - DEFORMATIONS STATIQUES HOMOGENES

Dans le cas le plus général, les termes de couplage précontrainte statique - milieu de propagation, $\overline{A_{ikjm}}$ (ou $\overline{B_{iskr}}$) dépendent des variables d'espace. Il ne sera possible d'intégrer directement les équations d'équilibre que dans des cas plus simples où les déformations statiques sont homogènes. Alors les gradients des déplacements $\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial a_j}$ ainsi que les efforts $\overline{T_{km}}$ sont indépendants des variables d'espace. C'est par exemple le cas de la compression uniaxiale simple.

Par suite $\overline{A_{ikjm}}$ et $\overline{B_{isjr}}$ ne dépendent pas de a_k (ou de x_s) et les équations d'équilibre se mettent sous la forme :

- dans l'état naturel :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial t^2} = \overline{A_{ikjm}} \frac{\partial^2 \overline{u_j}}{\partial a_k \partial a_m} \quad \text{II-44}$$

- dans l'état initial :

$$\overline{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \overline{B_{isjr}} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_s \partial x_r} \quad \text{II-45}$$

Intéressons-nous plus particulièrement à la relation (II-44). Les coefficients élastiques modifiés $\overline{A_{ikjm}}$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\overline{A_{ikjm}} = C_{ikjm} + \overline{\mathcal{P}_{ikjm}}$$

où C_{ikjm} sont les coefficients élastiques habituels (non perturbés) et $\overline{\mathcal{P}_{ikjm}}$ sont leurs variations liées à la déformation statique homogène.

L'équation (II-44) est identique à la relation (I-13). Il suffit de remplacer les constantes élastiques habituelles C_{ikjm} par les constantes modifiées $\overline{A_{ikjm}}$. Par conséquent, nous retrouvons le formalisme de l'élasticité linéaire pour un milieu possédant de nouvelles propriétés élastiques. Pour calculer les caractéristiques d'une onde se propageant sur milieu précontraint, nous substituerons dans la méthode de calcul numérique précédente les coefficients $\overline{A_{ikjm}}$ aux coefficients élastiques C_{ikjm} , préalablement calculés pour la configuration cristalline choisie.

L'onde de RAYLEIGH aura pour composantes :

$$u_i = {}^0u_i e^{-i \frac{\omega}{V} n_2 a_2} e^{i\omega(t - \frac{a_1}{V})} \quad \text{II-46}$$

où la vitesse de propagation, les atténuations en profondeur et les amplitudes sont différentes de celles du milieu non précontraint.

La résolution de l'équation de CHRISTOFFEL modifiée et les solutions reportées dans la condition limite

$$\text{Pour } a_2 = 0 \quad \overline{A_{2jkl}} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} = 0 \quad \text{II-47}$$

permettent de vérifier le nouveau déterminant

$$\Delta' = \det (\zeta'_{ijr}) \quad \text{II-48}$$

et ainsi de déterminer les caractéristiques des ondes se propageant sur le milieu précontraint, en particulier la nouvelle valeur de la vitesse de propagation V_0 .

Cette méthode simple, car elle n'entraîne pas de modification notable du programme précédent, est cependant limitée aux termes variationnels du premier degré (qu'il ne faut pas confondre avec l'ordre des coefficients élastiques).

Dans le cas où il est nécessaire d'introduire des approximations d'ordre supérieur, elle devient difficilement applicable et il est alors indispensable de recourir à la méthode suivante.

II-3-2 - MODIFICATION POLYNOMIALE DES CARACTERISTIQUES DU MILIEU

Soit ΔX la variation d'une grandeur physique X extérieure au cristal (température par exemple). Cette variation entraîne une modification des caractéristiques du milieu cristallin.

De façon générale, l'effet de la perturbation peut être décrit par un développement polynomial en fonction de ΔX .

Dans le cas de la température, on décrit parfaitement le comportement thermique statique du cristal par un développement limité au 3e degré, suivant les relations ci-dessous.

Variation des dimensions ℓ_i du milieu

$$\ell_i(X) = \ell_i^{\circ} (1 + \alpha_{\ell_i}^{(n)} \Delta X^n) \quad \text{II-49}$$

où ℓ_i° représente la valeur de l'élément ℓ_i pour $\Delta X = 0$ et $\alpha_{\ell_i}^{(n)}$ sont les coefficients de dilatation linéaire.

Comme la masse est un invariant, il s'ensuit une variation de la masse volumique :

$$\rho(X) = \rho^{\circ} (1 + \alpha_{\rho}^{(n)} \Delta X^n) \quad \text{II-50}$$

De la même façon est introduite la dépendance des constantes élastiques C_{ijkl}

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}^0 (1 + \alpha_{C_{ijkl}}^{(n)} \Delta X^n) \quad \text{II-51}$$

Les coefficients $\alpha_{\rho}^{(n)}$ et $C_{ijkl}^{(n)}$ sont les coefficients d'ordre n de la masse spécifique et des coefficients élastiques du cristal.

Par définition :

$$\alpha_Z^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n Z}{dX^n} \quad \text{II-52}$$

Ces coefficients sont mesurés autour d'une valeur de référence X_0 de la grandeur X et pour une orientation déterminée du cristal (en général la coupe Y).

Leurs valeurs peuvent être obtenues pour une orientation quelconque en appliquant des relations de transformation analogues à celles utilisées pour les constantes élastiques :

$$C'_{ijkl} = A_i^p A_j^q A_k^r A_l^s C_{pqrs} \quad \begin{array}{cc} \text{après rotation} & \text{avant rotation} \end{array}$$

où A_i^p sont les composantes de la matrice de rotation.

Le couplage entre l'onde et le milieu de propagation entraîne des modifications des caractéristiques de l'onde qui s'écrivent aussi sous la forme d'un développement limité en fonction de ΔX .

Ainsi la vitesse de propagation s'écrit :

$$V(X) = V_0 (1 + \alpha_V^{(n)} \Delta X^n) \quad \text{II-53}$$

Le calcul des coefficients du développement $\alpha_V^{(n)}$ permettra donc de déterminer précisément la loi de variation de la vitesse en fonction de la perturbation.

Ces coefficients définis comme précédemment sont calculés par dérivations successives jusqu'à l'ordre n de l'équation de propagation en régime linéaire (I-13)

$$\rho(X) \frac{\partial^2 u_i(X)}{\partial t^2} = C_{ijkl}(X) \frac{\partial^2 u_k(X)}{\partial x_j \partial x_l} \quad \text{II-54}$$

et de la condition limite associée (I-24)

$$C_{2jkl}^{(X)} \frac{\partial u_j(X)}{\partial x_l} = 0 \quad \text{en } x_2 = 0$$

Les dérivées successives font apparaître implicitement et successivement $\alpha_\rho^{(1)}$ et $\alpha_{C_{ijkl}}^{(1)}$, $\alpha_\rho^{(2)}$ et $\alpha_{C_{ijkl}}^{(2)}$, ... $\alpha_\rho^{(n)}$ et $\alpha_{C_{ijkl}}^{(n)}$ dans les valeurs de $\alpha_V^{(1)}$, $\alpha_V^{(2)}$, ... $\alpha_V^{(n)}$.

Nous avons développé et appliqué cette méthode dans le calcul des effets thermiques statiques agissant sur les ondes de RAYLEIGH.

II-4 - RESOLUTION PAR METHODE DE PERTURBATION

Nous venons de voir que l'intégration directe de l'équation d'équilibre (II-35) régissant les propriétés locales d'un cristal soumis à une précontrainte était difficilement réalisable lorsque cette dernière était inhomogène.

La méthode de perturbation que nous allons exposer ici consistera à obtenir une expression intégrale donnant directement les variations relatives de la vitesse de propagation en fonction des modifications statiques du milieu (17), (18), (19), (20).

II-4-1 - EQUATIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS INITIALES

Lorsque le milieu est soumis à une précontrainte statique, son équation d'équilibre s'écrit dans l'état naturel

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial a_k} \left(A_{ikjm} \frac{\partial u_j}{\partial a_m} \right)$$

La prédéformation étant statique ou quasi statique, elle n'engendre pas de fonctions harmoniques temporelles de la vibration dynamique u_i , mais seulement des fonctions harmoniques spatiales. Les solutions u_i restent donc sinusoïdales, seule leur fréquence angulaire ω_0 sera modifiée et prendra la valeur ω . En remplaçant u_i par $u_i e^{j\omega t}$ dans l'état initial et u_i^0 par $u_i^0 e^{j\omega_0 t}$ dans l'état naturel, les équations d'équilibre s'écrivent respectivement

$$-\rho_0 \omega^2 u_i = \frac{\partial}{\partial a_k} \left(A_{ikjm} \frac{\partial u_j}{\partial a_m} \right) \quad \text{II-55}$$

$$-\rho_0 \omega_0^2 u_i^0 = \frac{\partial}{\partial a_k} \left(C_{ikjm} \frac{\partial u_j^0}{\partial a_m} \right) \quad \text{II-56}$$

En toute généralité, nous pouvons dire que la fonction définissant la vibration u_i^0 dans l'état non déformé sera modifiée par l'application de la contrainte non seulement au niveau de sa vitesse V_0 , mais aussi de son amplitude u_i^0 . Les dispositifs que nous étudions, oscillateur à ligne à retard par exemple, ont des conditions d'oscillations telles que, quelle que soit la perturbation appliquée, le nombre d'ondes est conservé. Ainsi la variation de vitesse de phase est couplée à la variation de fréquence angulaire ω_0 .

Aux équations d'équilibre doivent être associées les conditions aux limites qui traduisent que la surface de propagation est libre de toute contrainte (les contraintes étant en général appliquées sur les bords latéraux du substrat).

Pour un cristal soumis à une précontrainte statique :

$$\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial a_m} = 0 \quad \text{à la surface du cristal} \quad \text{II-57}$$

et pour le même cristal libre de toute contrainte :

$$C_{ikjm} \frac{\partial u_j^0}{\partial a_m} = 0 \quad \text{à la surface} \quad \text{II-58}$$

II-4-2 - VARIATION RELATIVE DE VITESSE DE L'ONDE

L'équation (II-55) et l'équation (II-56), dont nous prenons le complexe conjugué, sont multipliées respectivement par u_i^{0*} et u_i (u_i^{0*} désigne la quantité conjuguée de u_i^0).

Nous considérons un domaine d'intégration correspondant à un volume v du cristal limité par une surface $\mathcal{S}$ et nous intégrons l'équation (II-56) sur le volume. Nous obtenons :

$$-\rho_0 \omega_0^2 \iiint_v u_i^{0*} u_i dv = \iiint_v u_i \frac{\partial}{\partial a_k} (C_{ikjm} \frac{\partial u_j^0}{\partial a_m}) dv \quad \text{II-59}$$

L'équation (II-55) est intégrée de la même façon :

$$-\rho_0 \omega^2 \iiint_v u_i u_i^{0*} dv = \iiint_v u_i^{0*} \frac{\partial}{\partial a_k} (\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial a_m}) dv \quad \text{II-60}$$

En développant aux premiers ordres par rapport à ω et u_i et en introduisant les conditions limites, les équations (II-59) et (II-60) prennent respectivement la forme :

$$-\rho_0 \omega_0^2 \iiint_v u_i^{0*} u_i^0 dv = \iiint_v \frac{\partial u_i^{0*}}{\partial a_k} C_{ikjm} \frac{\partial u_j^0}{\partial a_m} dv$$

$$-\rho_0 \omega^2 \iiint_v u_i^{0*} u_i^0 dv = \iiint_v \frac{\partial u_i^{0*}}{\partial a_k} \overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j^0}{\partial a_m} dv$$

En retranchant membre à membre ces deux relations et en ne conservant que les termes du premier ordre en $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, il reste :

$$2 \rho_0 \omega_0 \Delta\omega \iiint_V u_i^{\circ*} u_i^{\circ} dv = \iiint_V \frac{\partial u_i^{\circ*}}{\partial a_k} \overline{\mathcal{H}_{ikjm}} \frac{\partial u_j^{\circ}}{\partial a_m} dv \quad \text{II-61}$$

où $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}} = \overline{A_{ikjm}} - C_{ikjm}$ intervient comme la modification au premier ordre des coefficients élastiques lorsque le cristal est perturbé. Cette relation est très générale et peut être utilisée pour calculer soit la variation de vitesse, soit la variation de fréquence, soit la variation du vecteur d'onde suivant les cas considérés. Elle est valable aussi bien pour les ondes de volume que pour les ondes de surface.

La vitesse V , lorsque le milieu est précontraint, s'écrit :

$$V = V_0 + \Delta V$$

Lorsque les équations sont exprimées comme c'est le cas ici dans l'état naturel (système Lagrangien), les dimensions de la plaque sont prises par rapport à un système d'axes fixes et leurs variations sont implicitement comprises dans le calcul des coefficients élastiques modifiés $\overline{A_{ikjm}}$.

La relation entre les variations de vitesse et de fréquence s'écrit simplement :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad \text{II-62}$$

La variation relative de vitesse de phase de l'onde, due à la précontrainte statique, est alors donnée par :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\iiint_V \frac{\partial u_i^{\circ*}}{\partial a_k} \overline{\mathcal{H}_{ikjm}} \frac{\partial u_j^{\circ}}{\partial a_m} dv}{2 \rho_0 \omega_0^2 \iiint_V u_i^{\circ} u_i^{\circ*} dv} \quad \text{II-63}$$

L'utilisation de cette relation nécessite le calcul préalable de la prédéformation statique qui est implicitement contenue dans les termes $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$,

ainsi que les caractéristiques de la vibration sans précontrainte correspondant à u_i^0 et V_0 .

Remarque : Il est aussi possible de calculer la variation relative de vitesse à partir des coefficients $\overline{B_{iskr}}$ qui sont définis dans l'état initial (système Eulérien), c'est-à-dire après application de la précontrainte. Dans ce cas, il faudra tenir compte explicitement de la variation de dimension du cristal qui n'apparaît plus dans les constantes modifiées en raison du système d'axes choisi.

Dans la méthode de perturbation, l'une ou l'autre des représentations lagrangienne ou eulérienne sont équivalentes dans leur principe. En fait, les expressions obtenues à l'aide des coefficients $\overline{A_{ikjm}}$ sont plus simples à utiliser dans un calcul numérique.

II-4-3 - CAS DES ONDES DE RAYLEIGH

A partir de la relation générale (II-63) que nous venons d'établir, nous allons déterminer la variation relative de vitesse dans le cas précis d'une onde de RAYLEIGH.

Cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{I_2}{2 \rho_0 \omega_0^2 I_1} \quad \text{II-64}$$

Dans les intégrales I_1 et I_2 , nous introduisons les composantes u_i^0 de l'onde de RAYLEIGH non perturbée.

Il vient alors :

$$I_1 = \iiint_V u_i^0 u_i^{0*} dv = \iiint_V \sum_{p,q} A_p u_i^0(p) A_q^* u_i^0(q)^* e^{-i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*) a_2} dv$$

et :

$$I_2 = \iiint_V \frac{\partial u_i^*}{\partial a_k} \overline{\mathcal{H}_{ikjm}} \frac{\partial u_j^0}{\partial a_m} dv =$$

$$\left(\frac{\omega_0}{V_0}\right)^2 \iiint_V \overline{\mathcal{H}_{ikjm}} \sum_{p,q} A_p^0 \circ u_j^0(p) A_q^* \circ u_i^0(q)^* n_m^{(p)} n_k^{(q)*} e^{-i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*) a_2} dv$$

$\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$ indépendant de la variable d'espace a_2

La longueur d'onde λ reste suffisamment faible pour que nous puissions toujours supposer que les coefficients du tenseur $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$ demeurent inchangés dans une surface λ^2 .

Les propriétés de l'onde seront donc calculées en tout point (a_1, a_3) de la surface, l'intégration étant effectuée sur toute l'épaisseur du milieu semi-infini.

Le calcul des intégrales I_1 et I_2 conduit alors à la relation donnant la variation relative de vitesse :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\overline{\mathcal{H}_{ikjm}} \sum_{p,q} \frac{A_p^0 \circ u_j^0(p) A_q^* \circ u_i^0(q)^* n_m^{(p)} n_k^{(q)*}}{q_p - q_q^*}}{2 \rho_0 V_0^2 \sum_{p,q} \frac{A_p^0 \circ u_l^0(p) A_q^* \circ u_l^0(q)^*}{q_p - q_q^*}}$$

II-65

La variation relative de vitesse de l'onde de RAYLEIGH se propageant sur un cristal soumis à une précontrainte statique est une valeur moyenne obtenue dans un petit domaine de la surface de propagation centré autour du point (a_1, a_3) . Elle prend par contre en compte la totalité de l'épaisseur de la plaque cristalline sous ce domaine. Pour une plaque de dimensions finies $2L$ suivant $\overrightarrow{Ox_1}$ et $2l$ suivant $\overrightarrow{Ox_3}$, il sera nécessaire de calculer les variations $\frac{\Delta V}{V_0}(a_1, a_3)$ en différents points (a_1, a_3) de la surface, puis de déterminer la valeur moyenne sur le domaine correspondant à la longueur effective de parcours de l'onde.

$\overline{\mathcal{H}}_{ikjm}$ fonction de la variable d'espace a_2

Lorsque les effets de la précontrainte sont inhomogènes, les efforts, déformations et déplacements dépendent non seulement de la position (a_1, a_3) mais aussi de la variable d'espace a_2 .

Dans le cas d'une onde de surface, la profondeur de pénétration dans le matériau étant très faible (de l'ordre de 2λ), la détermination des termes de la prédéformation peut être faite à la surface de propagation en chaque point P de coordonnées a_1, a_3 , c'est-à-dire pour $a_2 = 0$ (fig. 20).

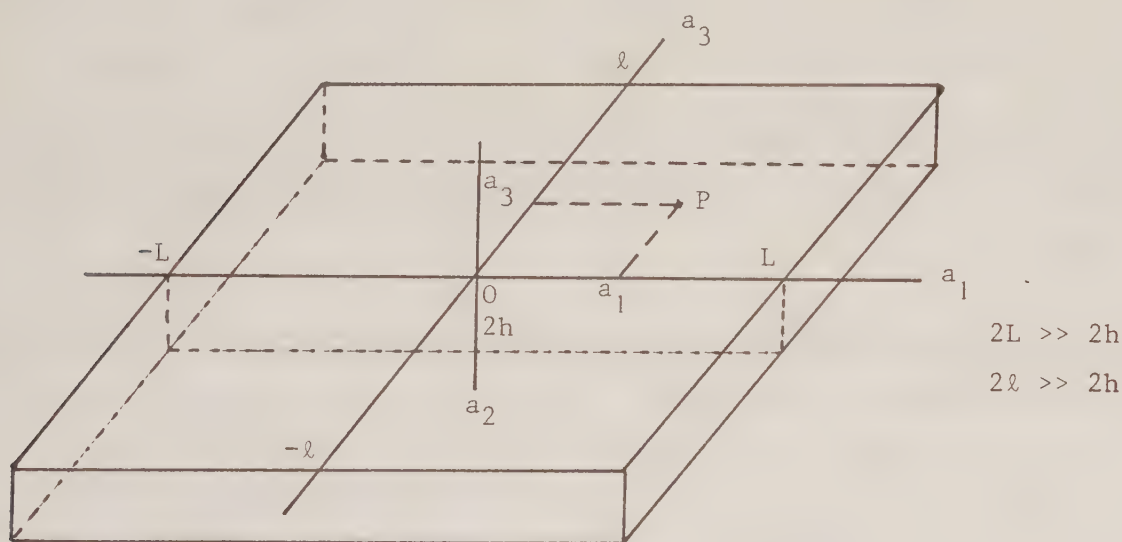


Fig. 20

Le calcul des termes du couplage non linéaire $\overline{\mathcal{H}}_{ikjm}$ est alors semblable à celui exposé précédemment, en considérant toutefois les coordonnées a_1 et a_3 comme des paramètres. La valeur moyenne de la variation relative de vitesse est aussi déterminée en prenant en compte la surface effective parcourue par l'onde haute fréquence.

Cependant, cette interprétation du couplage entre la précontrainte et l'onde reste approchée du fait de l'inhomogénéité suivant a_2 de la prédéformation qui peut varier très rapidement au-dessous de la surface de propagation, même dans la tranche de substrat d'épaisseur 2λ . Aussi, il s'avère nécessaire de tenir compte de la variable a_2 permettant la prise en considération du couplage en volume sur l'épaisseur de la plaque.

En général, les termes de la prédéformation s'expriment sous forme de polynômes fonctions des puissances de a_2 .

Par conséquent, chaque terme du tenseur $\overline{A_{ikjm}}$ exprimant le couplage non linéaire entre le cristal et la prédéformation, qui est une fonction linéarisée des $\overline{T_{ij}}$, $\overline{S_{kl}}$ et des gradients des déplacements $\overline{u_i}$ s'écrit comme un polynôme d'ordre n en a_2 .

L'ordre du polynôme dépend essentiellement du type de précontrainte appliquée sur la lame cristalline et des modes de fixation de cette dernière (encastrement, collage,...).

Comme $\overline{H_{ikjm}}$ est égal à la variation des coefficients élastiques C_{ikjm} au cours de l'application de la précontrainte, chaque terme du tenseur s'écrit :

$$\overline{H_{ikjm}} = \sum_n \overline{\alpha_{ikjm}}^{(n)} a_2^n \quad \text{II-66}$$

où les coefficients $\overline{\alpha_{ikjm}}^{(n)}$ dépendent des expressions correspondantes au développement des efforts, des déformations statiques, des déplacements et de leurs gradients suivant les puissances de a_2 .

La forme analytique représentant l'onde de RAYLEIGH ne nous permet pas de faire une moyenne préalable des coefficients $\overline{H_{ikjm}}$ suivant l'épaisseur du substrat.

Il est donc nécessaire de déterminer directement la valeur de l'intégrale I_2 comme la somme de termes correspondant aux différentes puissances de a_2 des coefficients de couplage : cette intégrale représente la grandeur de la variation de vitesse due globalement à la perturbation calculée au premier ordre.

L'intégrale I_2 s'écrit, en tenant compte de la relation (II-66) :

$$I_2 = \lambda^2 \left(\frac{\omega_0}{V_0}\right)^2 \sum_n \overline{\alpha_{ikjm}^{(n)}} \sum_{p,q} A_p \circ_{u_j} \circ(p) A_q^* \circ_{u_i} \circ(q)^* n_m^{(p)} n_k^{(q)*} \int_0^\infty a_2^n e^{-i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*) a_2} da_2$$

L'intégration est effectuée strictement sur l'épaisseur du cristal. En fait, la pénétration de l'onde correspond à uniquement deux longueurs d'onde. Dans tous les cas l'épaisseur est très grande comparée à 2λ et dans la relation précédente, on peut la considérer comme infinie car, parmi toutes les solutions possibles, seront retenues uniquement celles qui correspondent à une onde atténuée en profondeur.

Cette intégrale se met sous la forme :

$$I_2 = -i\lambda^2 \left(\frac{\omega_0}{V_0}\right)^2 \frac{V_0}{\omega_0} \sum_n \overline{\alpha_{ikjm}^{(n)}} \sum_{p,q} \frac{A_p \circ_{u_j} \circ(p) A_q^* \circ_{u_i} \circ(q)^* n_m^{(p)} n_k^{(q)*}}{q_p - q_q^*} \cdot \frac{n!}{\left(i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*)\right)^n} \quad \text{II-67}$$

La relation donnant la variation relative de vitesse est obtenue à partir de la relation (II-64) en remplaçant l'intégrale I_2 par sa nouvelle expression. Il vient alors :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\sum_n \left(\sum_{p,q} \frac{A_p \circ_{u_j} \circ(p) A_q^* \circ_{u_i} \circ(q)^* n_m^{(p)} n_k^{(q)*}}{q_p - q_q^*} \cdot \frac{n! \overline{\alpha_{ikjm}^{(n)}}}{\left(i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*)\right)^n} \right)}{2 \rho_0 V_0^2 \sum_{p,q} \frac{A_p \circ_{u_\ell} \circ(p) A_q^* \circ_{u_\ell} \circ(q)^*}{q_p - q_q^*}} \quad \text{II-68}$$

Remarque : A l'ordre $n = 0$, la dépendance en fonction de a_2 de $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$ disparaît et $\overline{\alpha_{ikjm}}^{(0)}$ est alors égal à la valeur de $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$ que nous avons introduite dans le paragraphe précédent. La relation (II-68) devient identique à (II-65).

De la même façon que pour le cas où $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$ ne dépend pas de la variable a_2 , la valeur de la variation relative de vitesse est une valeur moyenne sur une surface λ^2 en un point (a_1, a_3) de la surface de propagation.

La valeur finale retenue $\frac{\Delta V}{V_0}$ sera obtenue en calculant la moyenne $\langle \frac{\Delta V}{V_0} \rangle_{a_1, a_3}$ sur l'ensemble de la surface parcourue par l'onde.

CHAPITRE III

EFFETS THERMIQUES

-oOo-

L'influence de la température sur les propriétés des matériaux utilisés comme substrats des lignes à retard ou des résonateurs est un phénomène indésirable, car elle introduit une modification des caractéristiques de l'onde qui s'y propage.

Lorsqu'un cristal, à la température initiale T_0 , est soumis à une variation de la température due au milieu environnant (ou éventuellement à la présence de sources de chaleur dans son volume), il se produit un déséquilibre thermique qui se traduit par une diffusion, l'apparition de gradients de température et donc de propriétés inhomogènes. Cette perturbation est donc suivie d'un nouvel état d'équilibre. Les inhomogénéités introduites disparaissent alors (si la source de température est uniforme) mais avec une certaine constante de temps et le milieu présente des propriétés correspondant à la nouvelle température d'équilibre T' . Par voie de conséquence, les caractéristiques de l'onde seront aussi modifiées.

La première phase du phénomène correspond au régime thermique dynamique. La phase du phénomène correspondant à un état d'équilibre est appelée régime thermique statique. Les caractéristiques statiques correspondent à une succession d'états d'équilibre, le passage de l'un à l'autre se faisant infiniment lentement et de façon réversible.

Dans certains cas, les deux régimes sont superposés. En effet, des fluctuations "rapides" peuvent apparaître en même temps que se produit une variation "lente".

Dans le présent travail, nous nous placerons dans le cas où il est possible d'étudier les effets statiques (ou quasi statiques) indépendamment des effets dynamiques. Cependant, les méthodes développées sur le couplage non linéaire sont parfaitement adaptées au traitement des phénomènes dynamiques et feront l'objet de travaux ultérieurs.

Ce chapitre sera donc essentiellement consacré à l'étude des effets statiques et présentera les caractéristiques fréquence-température des lignes et résonateurs à quartz à onde de surface, ainsi que les valeurs des coefficients de température des premier, second et troisième ordre. Cette exploration des propriétés thermiques du quartz permet ainsi de dresser une cartographie complète des valeurs des coefficients de température et des lieux correspondant à une valeur nulle. La méthode de mesure qui a permis de vérifier les prévisions théoriques et de rechercher les coupes les plus intéressantes sera présentée.

III-1 - CALCUL DES COEFFICIENTS DE TEMPERATURE STATIQUES

Une variation de température entraîne une modification des constantes élastiques, piézoélectriques, électriques, ainsi que des dimensions et de la masse spécifique du cristal.

Dans le cas d'une variation statique, les effets sont homogènes dans l'ensemble du matériau et pour les étudier, la méthode variationnelle exposée au chapitre précédent est la plus appropriée.

Rappelons rapidement que les variations de masse spécifique peuvent s'écrire :

$$\rho(T) = \rho(T_0) (1 + \alpha_{\rho}^{(n)} (T - T_0)^n) \quad \text{III-1}$$

La variation des coefficients élastiques prend une forme analogue :

$$C_{ijkl}^{(T)} = C_{ijkl}^{(T_0)} (1 + \alpha_{C_{ijkl}}^{(n)} (T - T_0)^n) \quad \text{III-2}$$

où T_0 est la température de référence, $\alpha_{\rho}^{(n)}$ et $\alpha_{C_{ijkl}}^{(n)}$ sont respectivement les coefficients de température à l'ordre n de la masse volumique et des constantes élastiques.

Par définition, ces coefficients de température s'écrivent :

$$\alpha_{\rho}^{(n)} = \frac{1}{n! \rho(T_0)} \frac{d^n \rho}{dT^n} \quad \text{et} \quad \alpha_{C_{ijkl}}^{(n)} = \frac{1}{n! C_{ijkl}^{(T_0)}} \frac{d^n C_{ijkl}}{dT^n} \quad \text{III-3}$$

Il en va de même pour les constantes piézoélectriques e_{ijk} et de permittivité ϵ_{ij} .

Nous avons vu que le milieu de propagation considéré reste linéaire, et par suite, les paramètres caractéristiques de l'onde pourront s'écrire également sous une forme polynomiale.

Ainsi pour la vitesse :

$$V(T) = V(T_0) (1 + \alpha_V^{(n)} (T - T_0)^n) \quad \text{III-4}$$

où $V(T_0)$ est la vitesse de propagation de l'onde à la température de référence T_0 et $\alpha_V^{(n)}$ les coefficients de température d'ordre n

$$\alpha_V^{(n)} = \frac{1}{n! V(T_0)} \frac{d^n V}{dT^n} \quad \text{III-5}$$

Il en est de même pour la fréquence de synchronisme :

$$f(T) = f(T_0) (1 + \alpha_f^{(n)} (T - T_0)^n) \quad \text{III-6}$$

avec :

$$\alpha_f^{(n)} = \frac{1}{n! f(T_0)} \frac{d^n f}{dT^n} \quad \text{III-7}$$

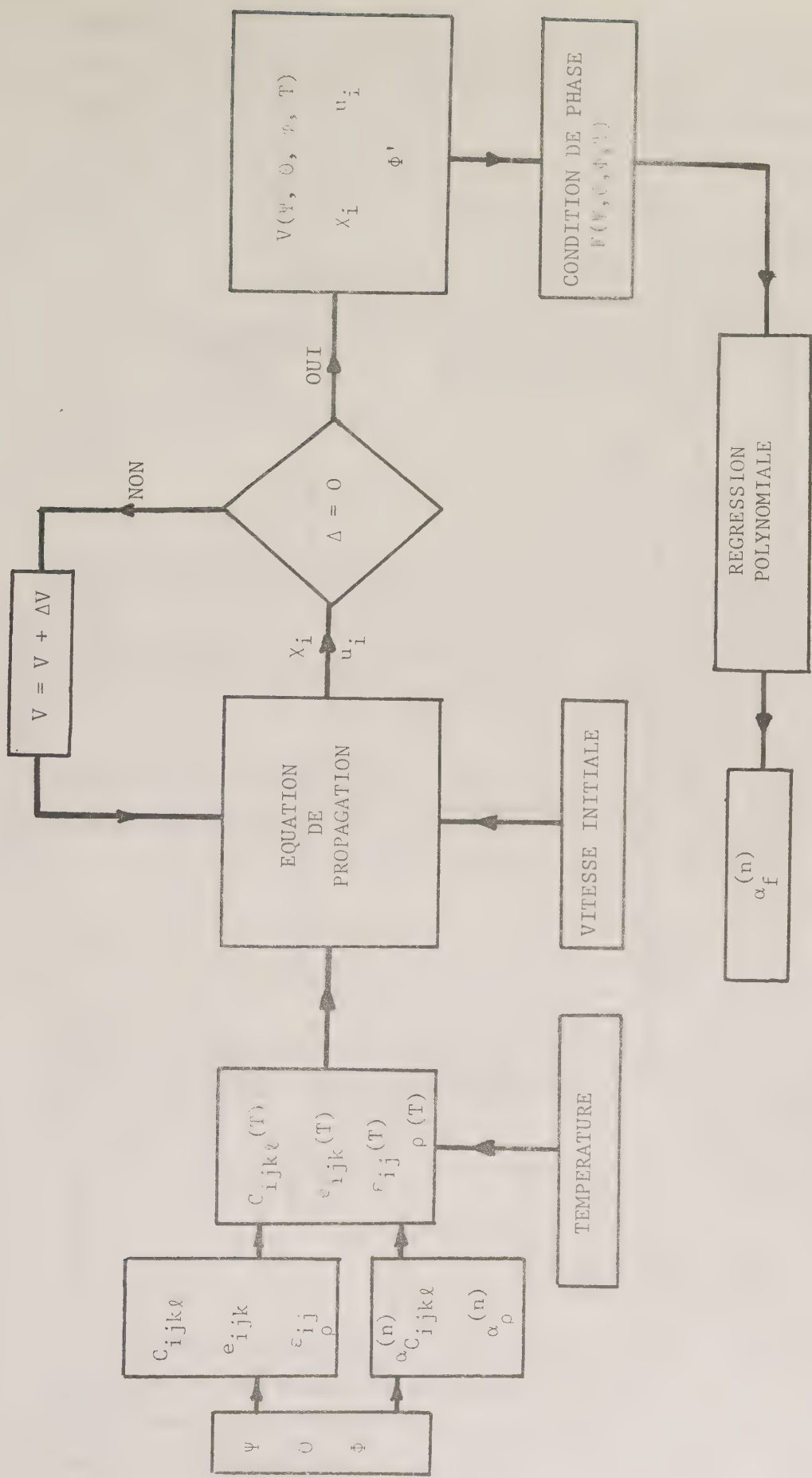
Tous les paramètres tels que l'amplitude, l'atténuation et la direction du flux d'énergie suivent également la même loi.

Le calcul des coefficients de température de la vitesse et de la fréquence peut être réalisé par deux méthodes : la méthode de régression polynomiale ou la méthode variationnelle.

III-1-1 - METHODE DE REGRESSION POLYNOMIALE

Dans cette méthode, nous calculons les valeurs des coefficients élastiques $C_{ijkl}(T)$ et de la masse spécifique $\rho(T)$ à différentes températures T . Ceci suppose évidemment la connaissance des coefficients de température $\alpha_\rho^{(n)}(T_0)$ et $\alpha_{C_{ijkl}}^{(n)}(T_0)$ à la température de référence (voir annexe) et nous en déduisons, à l'aide du programme de calcul, les valeurs de la vitesse $V(T)$ aux différentes températures T .

Nous obtenons ainsi la caractéristique "vitesse-température" de l'onde de RAYLEIGH pour une configuration (Φ, Θ, Ψ) choisie.



χ : coefficient de pénétration

Fig. 21

L'organigramme de cette méthode est présenté sur la figure (21). La valeur de la fréquence se déduit directement de celle de la vitesse par la condition de phase lorsque la ligne à onde de surface est "bouclée" par un amplificateur.

$$\frac{\omega L}{V} = \text{constante} \quad \text{III-8}$$

où L est la longueur effective de parcours de l'onde.

La variation relative de fréquence en fonction de la température s'écrit donc :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta V}{V} - \frac{\Delta L}{L} \quad \text{III-9}$$

$$\text{où } \Delta V/V = (V(T) - V(T_0)) / V(T_0)$$

Les variations relatives du parcours L s'expriment en fonction de la température par les coefficients de dilatation $\alpha_L^{(n)}$:

$$L(T) = L(T_0) (1 + \alpha_L^{(n)} (T - T_0)^n) \quad \text{III-10}$$

De la caractéristique "fréquence-température", nous déduisons finalement les coefficients de température $\alpha_f^{(n)}$ de la fréquence par régression polynomiale, car la relation (III-6) peut se mettre sous la forme :

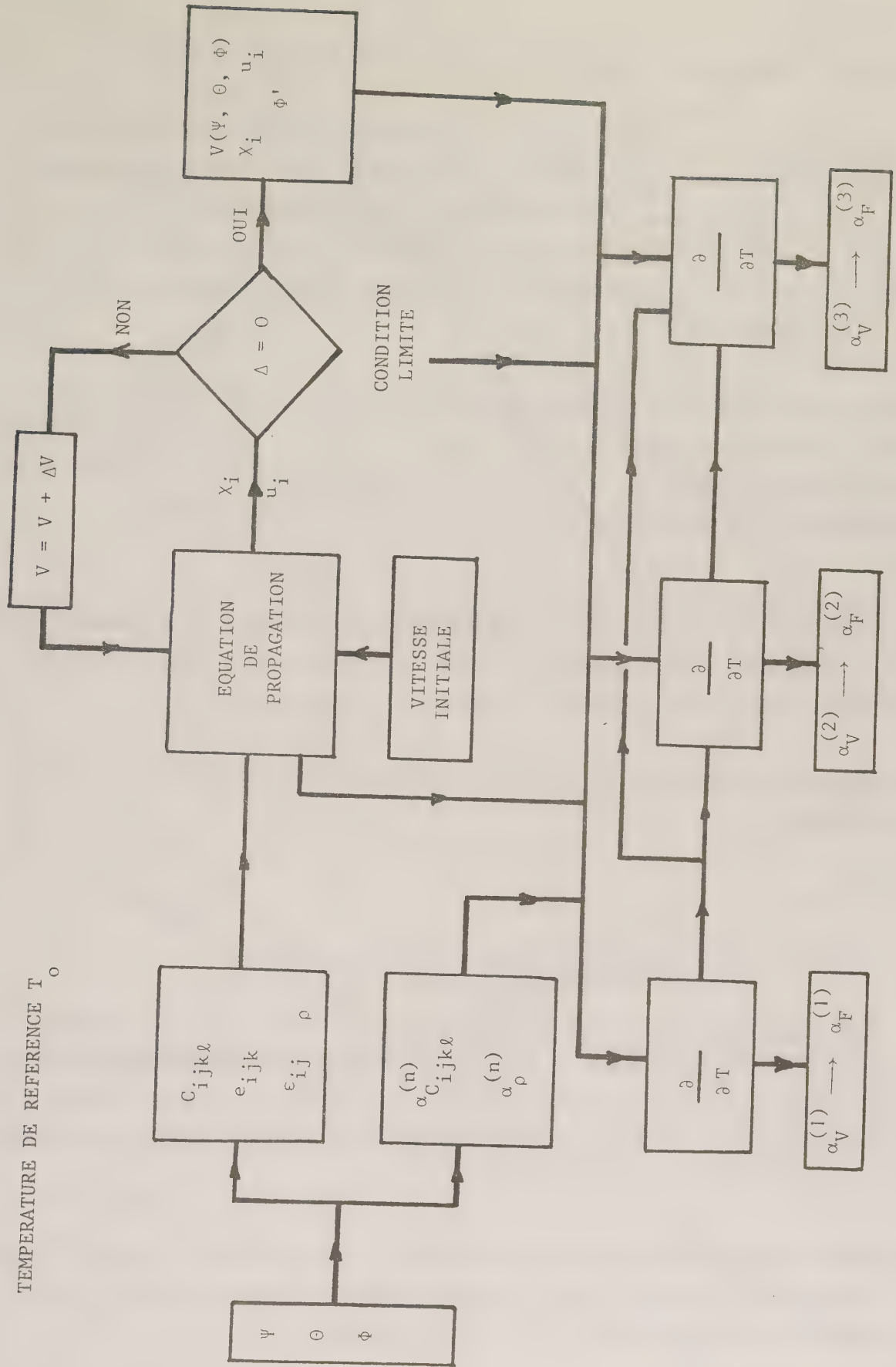
$$\frac{\Delta f}{f(T_0)} = \alpha_f^{(n)} \cdot (T - T_0)^n \quad \text{III-11}$$

Cette méthode a déjà été utilisée par plusieurs auteurs (8), (10), (24) mais a été limitée à la détermination des coefficients du premier ordre en raison de sa précision.

III-1-2 - METHODE VARIATIONNELLE

Dans cette méthode, nous calculons les coefficients de température de tous les paramètres entrant dans la résolution de l'équation de propagation et de la condition limite par dérivations successives des systèmes d'équation correspondants, exprimées au voisinage de la température de référence T_0 .

TEMPERATURE DE REFERENCE T_0



X : coefficient de pénétration

Fig. 22

La figure (22) présente l'organigramme de cette méthode.

La différence essentielle entre les deux méthodes réside dans le fait que pour la seconde, les coefficients de température sont obtenus directement par un calcul analytique. Par conséquent, la précision reste la même quelque soit l'ordre considéré. La source principale d'incertitude est alors limitée à la précision avec laquelle sont connus les coefficients de température du matériau ($\alpha_{\rho}^{(n)}$ et $\alpha_{C_{ijkl}}^{(n)}$).

Dans son principe, cette méthode peut être utilisée jusqu'à un ordre quelconque. Le programme a été élaboré jusqu'à l'ordre 3, car pratiquement, les coefficients de température des cristaux susceptibles d'être utilisés, peuvent parfois être connus jusqu'à cet ordre. C'est en particulier le cas du quartz.

Signalons que les valeurs des coefficients de température du troisième ordre restent inconnus pour de nombreux substrats (niobate de lithium, tantalate de lithium, berlinite, silicium, arséniure de gallium, etc...).

Des résultats obtenus par la méthode variationnelle sont publiés en annexe 4 de ce mémoire.

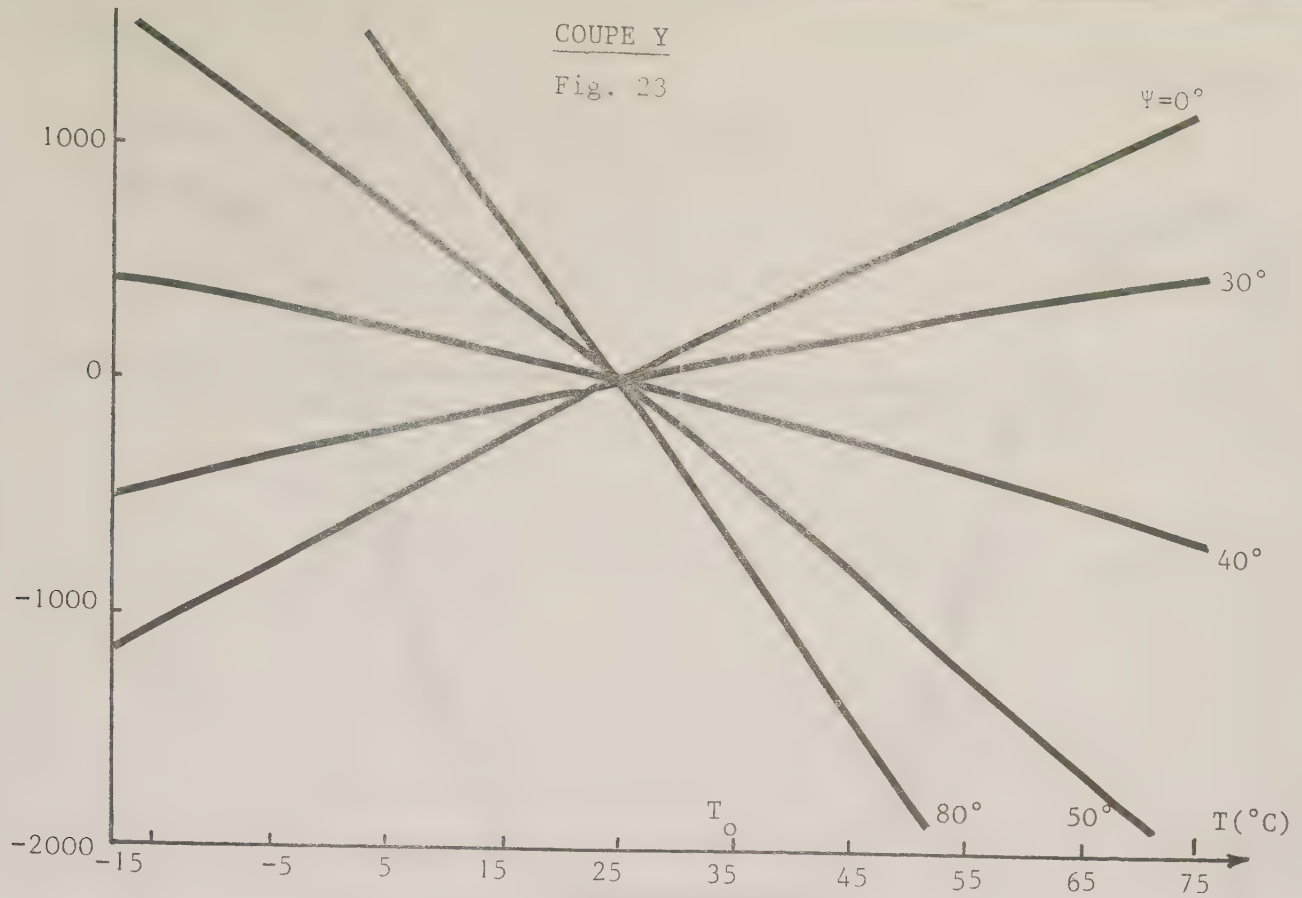
III-1-3 - COEFFICIENTS DE TEMPERATURE DU QUARTZ

Les programmes de calculs numériques ont été écrits suivant les deux méthodes décrites précédemment et ont été appliquées au cristal de quartz. Des vérifications ont pu être effectuées par comparaison entre les résultats donnés par chaque méthode d'une part et par comparaison avec des valeurs expérimentales d'autre part.

Le quartz étant faiblement piézoélectrique, l'influence de la température sur les constantes piézoélectriques et diélectriques n'apparaît pas au niveau de la vitesse et de la fréquence. Elle sera donc négligée.

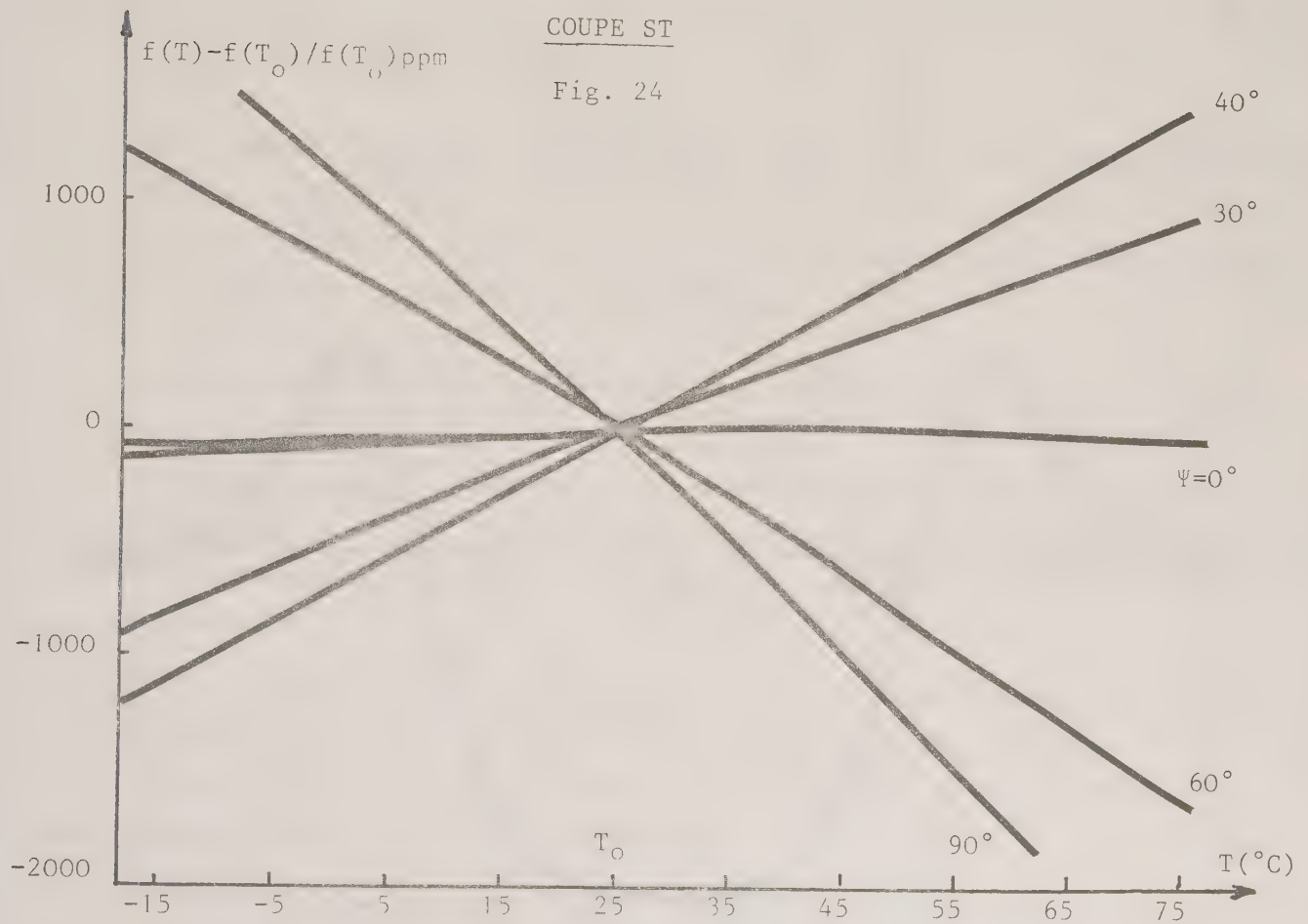
COUPE Y

Fig. 23



COUPE ST

Fig. 24



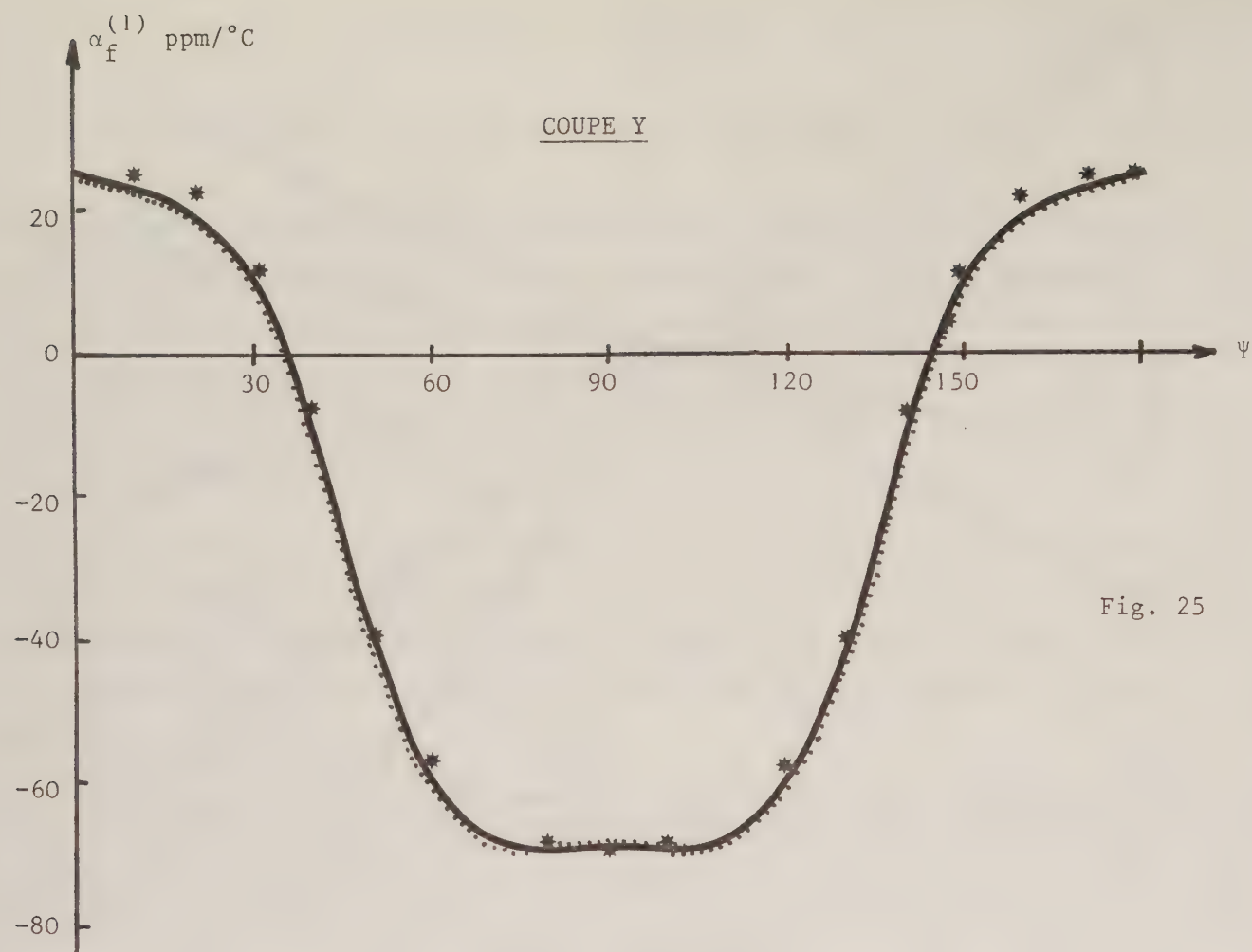


Fig. 25

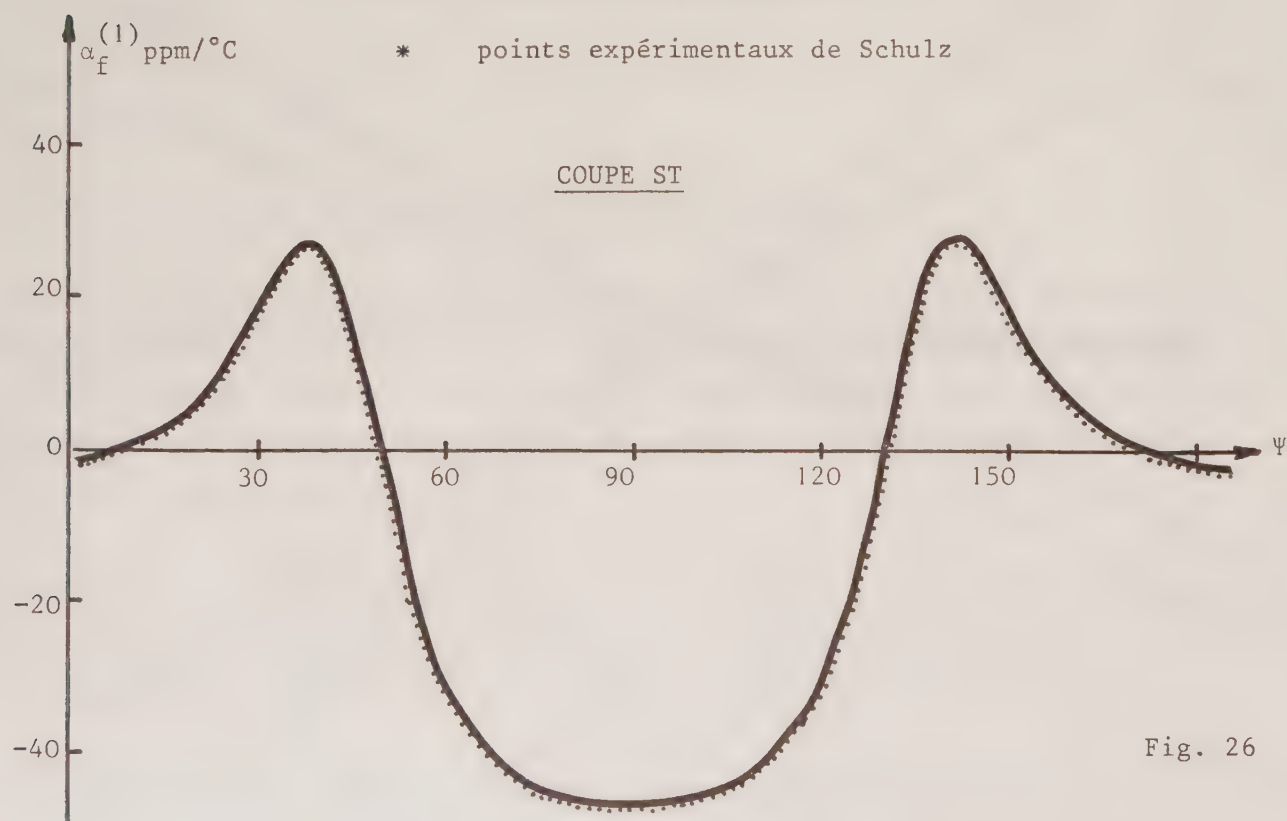


Fig. 26

Comparaison entre les deux méthodes de calcul

La figure (23) montre les variations de fréquence calculées dans le cas d'une coupe Y ($\phi = \theta = 0$) et pour des directions de propagation Ψ correspondant à 0° ; 30° ; 40° ; 50° et 80° .

La pente de ces courbes est sensible à la direction et change de signe entre $\Psi = 30^\circ$ et $\Psi \approx 40^\circ$.

La figure (24) correspond à la coupe ST et montre que la pente est nulle pour $\Psi = 0^\circ$ et $\Psi = 50^\circ$.

Les variations des coefficients de température du 1er et 2e ordre des coupes Y et ST obtenues par régression polynomiale à partir des courbes précédentes, sont représentées en trait pointillé sur les figures (25) et (26) en fonction de la direction de propagation Ψ (24), (25), (26). Les courbes en trait continu correspondent aux valeurs calculées par la méthode variationnelle.

Sur la figure (25) sont portés les points expérimentaux publiés par SCHULZ - MATZINGER - HOLLAND (22).

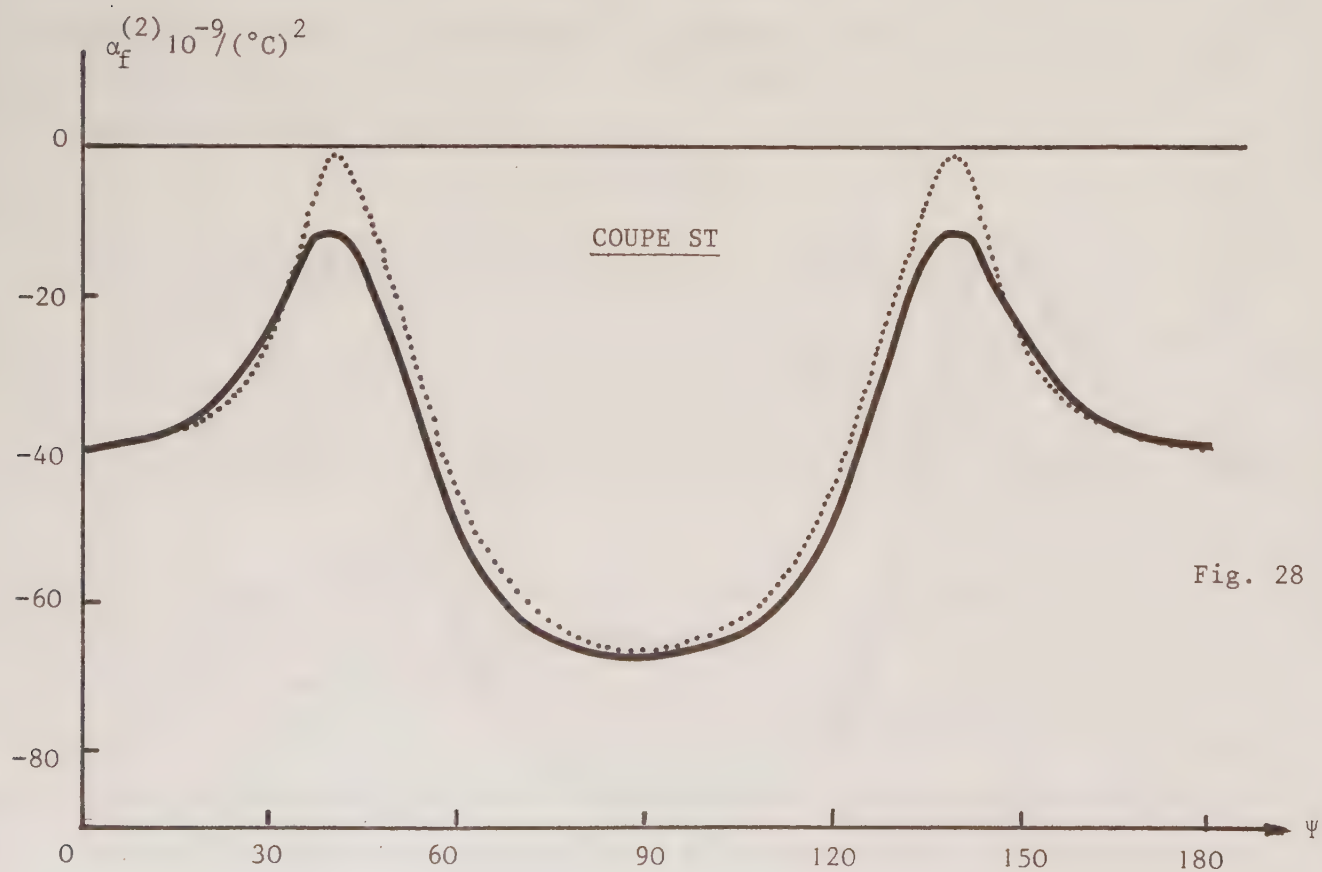
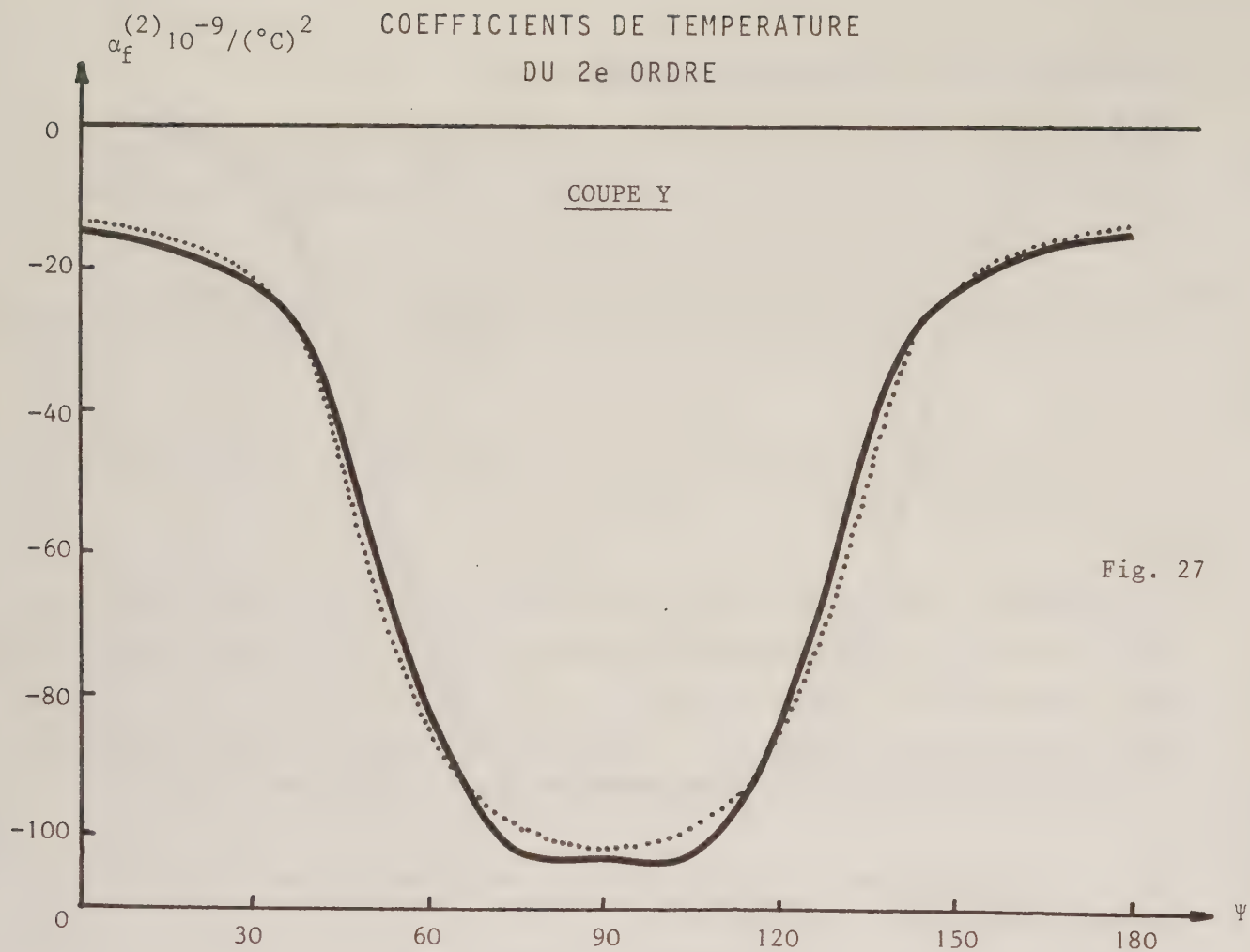
Les figures (27) et (28) représentent l'évolution du coefficient de température du second ordre des coupes Y et ST en fonction de Ψ . Elles montrent que si l'accord est excellent pour le premier ordre entre les deux méthodes, il n'en est plus de même pour le second ordre.

La précision de la méthode de régression polynomiale est limitée pour les raisons suivantes :

- d'une part, chaque point de la caractéristique "vitesse-température" est calculé avec une imprécision de l'ordre de 3 ppm qui provient de l'erreur systématique introduite par le calcul numérique, la vitesse n'étant connue qu'à ± 1 cm/s.

- d'autre part, la régression polynomiale elle-même apporte une certaine incertitude. Ainsi la dispersion (même faible) des points de la caractéristique théorique et les limites de la régression polynomiale contribuent à l'incertitude totale de la méthode.

S'il semble difficile par cette méthode d'obtenir les valeurs des coefficients du second ordre, il est impossible de déterminer ceux du troisième ordre.



..... régression polynomiale

— méthode variationnelle

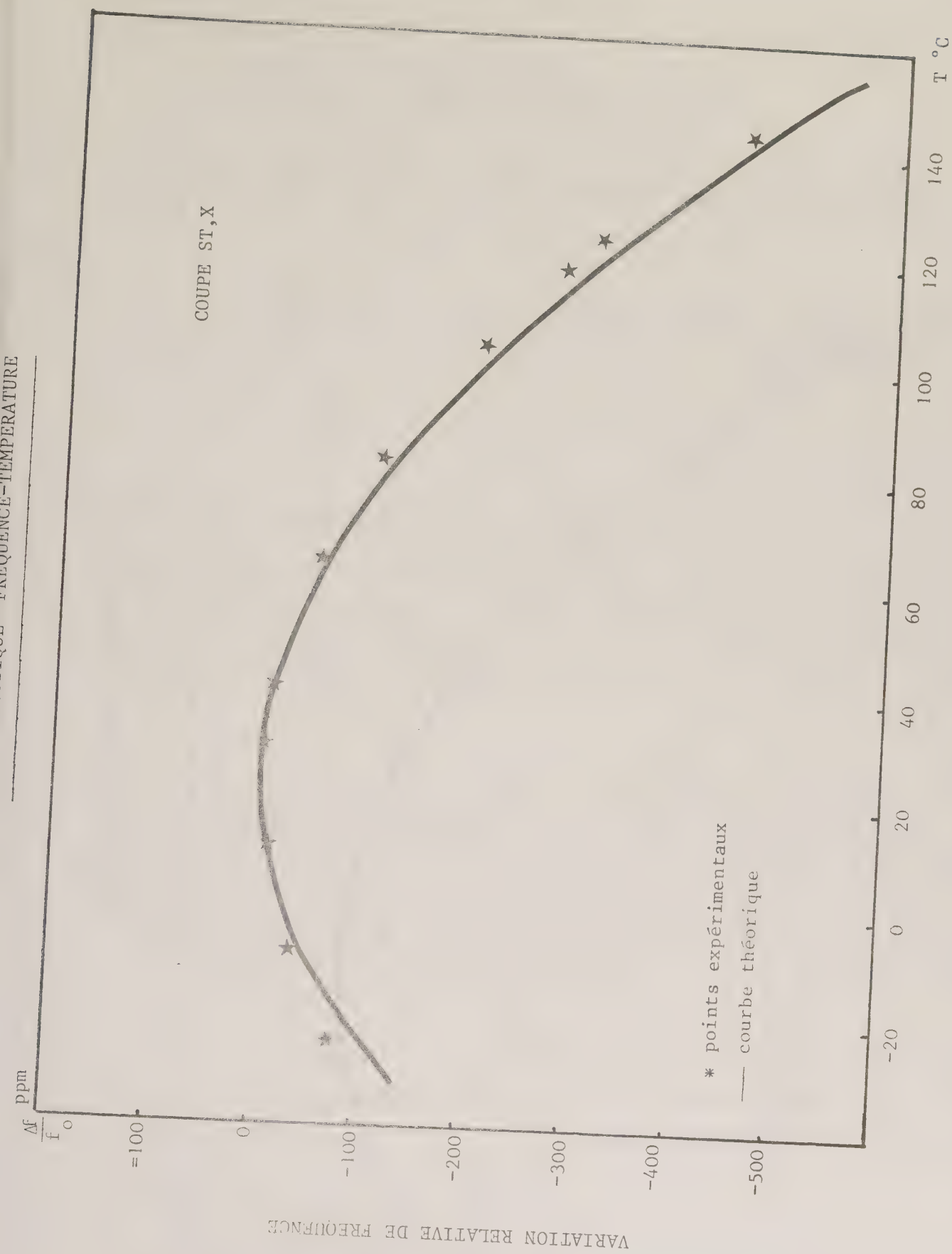
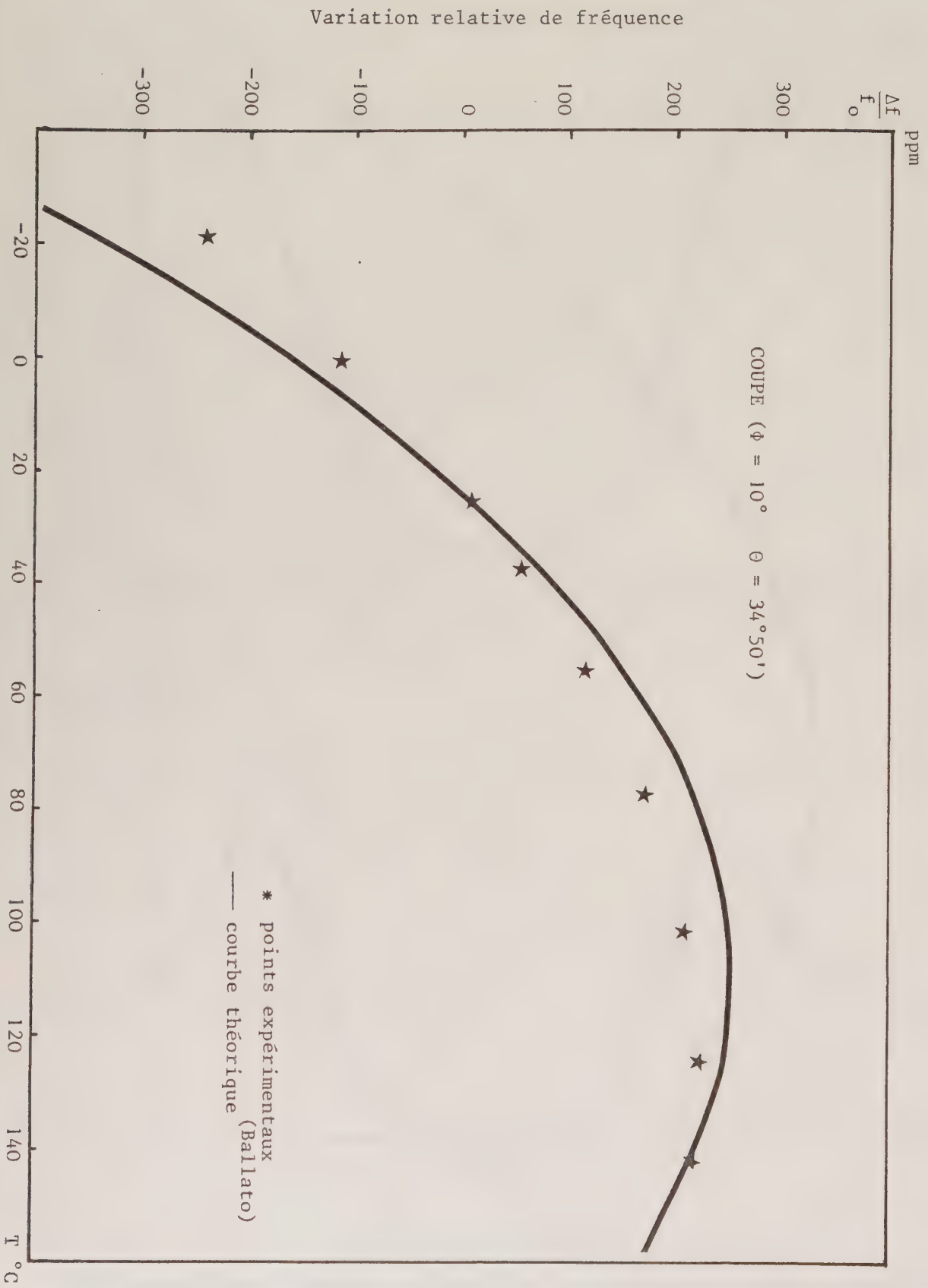


Fig. 29

CARACTERISTIQUE FREQUENCE-TEMPERATURE



Les figures (29), (30) et (31) présentent une comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales des caractéristiques "fréquence-température" de la coupe ST, direction de propagation X pour laquelle les coefficients de température calculés sont respectivement :

$$\alpha_f^{(1)} = 0 \quad \alpha_f^{(2)} = -39,6 \cdot 10^{-9} / ^\circ\text{C}^2 \quad \alpha_f^{(3)} = 58,3 \cdot 10^{-12} / ^\circ\text{C}^3$$

et des coupes à double rotation, direction de propagation X

$$\Phi = 10^\circ \quad \text{et} \quad \Phi = 15^\circ \quad \Theta \approx 34^\circ$$

Sur ces courbes figurent la caractéristique théorique représentée en continu : les valeurs expérimentales nous ont été aimablement fournies A. BALLATO.

Lieux des coupes où $\alpha_f^{(1)}$, $\alpha_f^{(2)}$ et $\alpha_f^{(3)}$ sont nuls

La nécessité de connaître les coefficients d'ordre supérieur avec une bonne précision nous a conduit à utiliser la méthode variationnelle pour une variation systématique de leurs valeurs en vue de déterminer les lieux correspondant à l'annulation des coefficients des premier, deuxième et troisième ordre.

Les résultats obtenus sont regroupés sur des courbes correspondant à une représentation stéréographique (26) (27) en coordonnées polaires, où Θ est le module et Φ l'argument. Chaque graphique correspond à une valeur déterminée de la direction de propagation. A titre d'exemple, sur les figures (32), (33) et (34) sont représentés les lieux des coefficients de température des premier, deuxième et troisième ordre à valeurs constantes lorsque la direction de propagation est égale à 9° .

Dans le but de mettre en évidence directement l'existence, pour certaines directions de propagation, de coupes ayant plusieurs coefficients de température nuls simultanément, il est intéressant de représenter sur un même graphique les lieux (Φ , Θ) pour lesquels les coefficients de température des premiers, second et troisième ordre sont nuls.

Ces courbes sont représentées sur les figures (35) à (45) pour des valeurs de Ψ comprises entre 0° et 90° et variant de 9° en 9° .

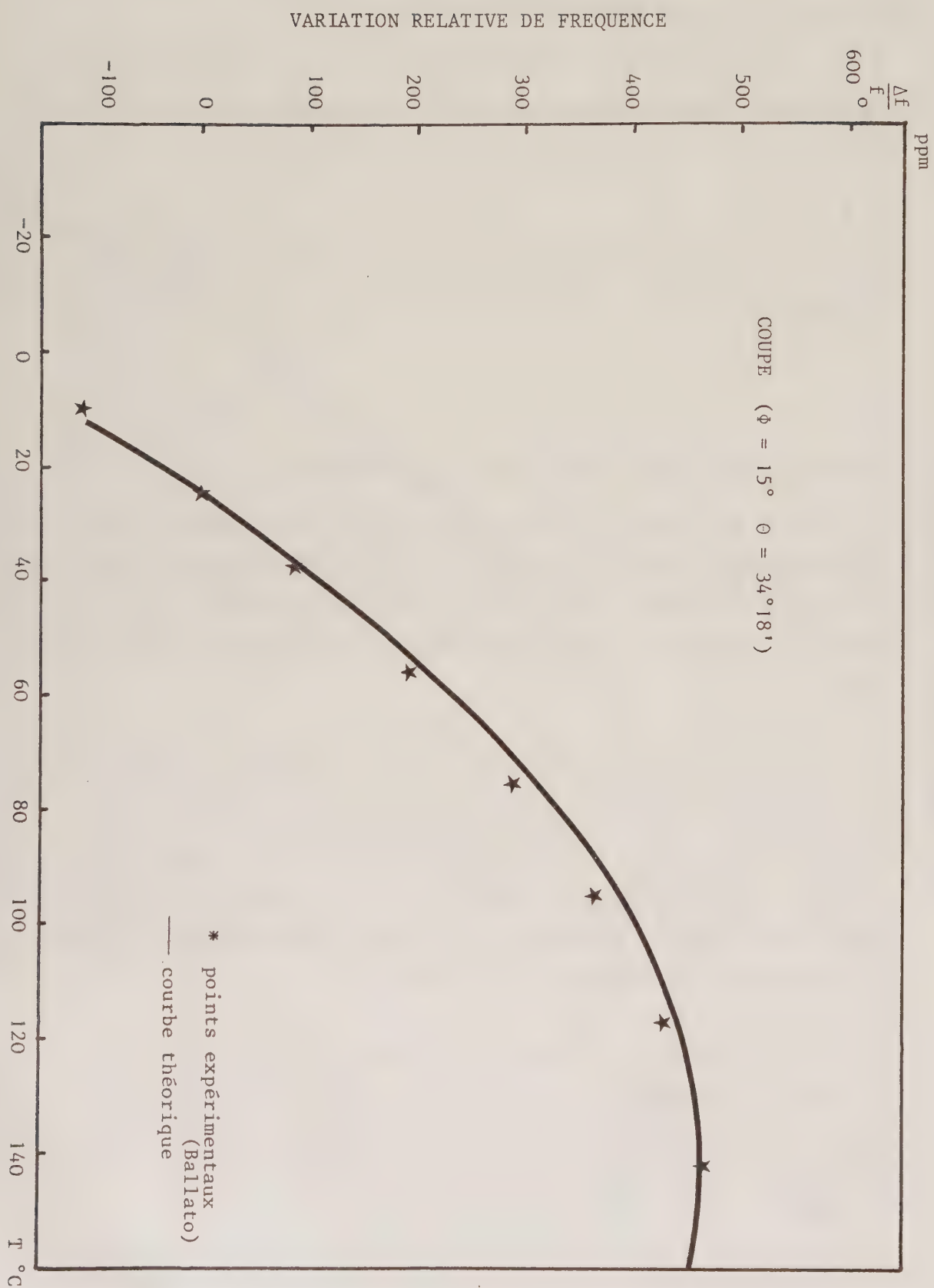


Fig. 31

COEFFICIENT DE TEMPERATURE DU 1^{er} ORDRE $\alpha_f^{(1)}$

$$\Psi = 9^\circ$$

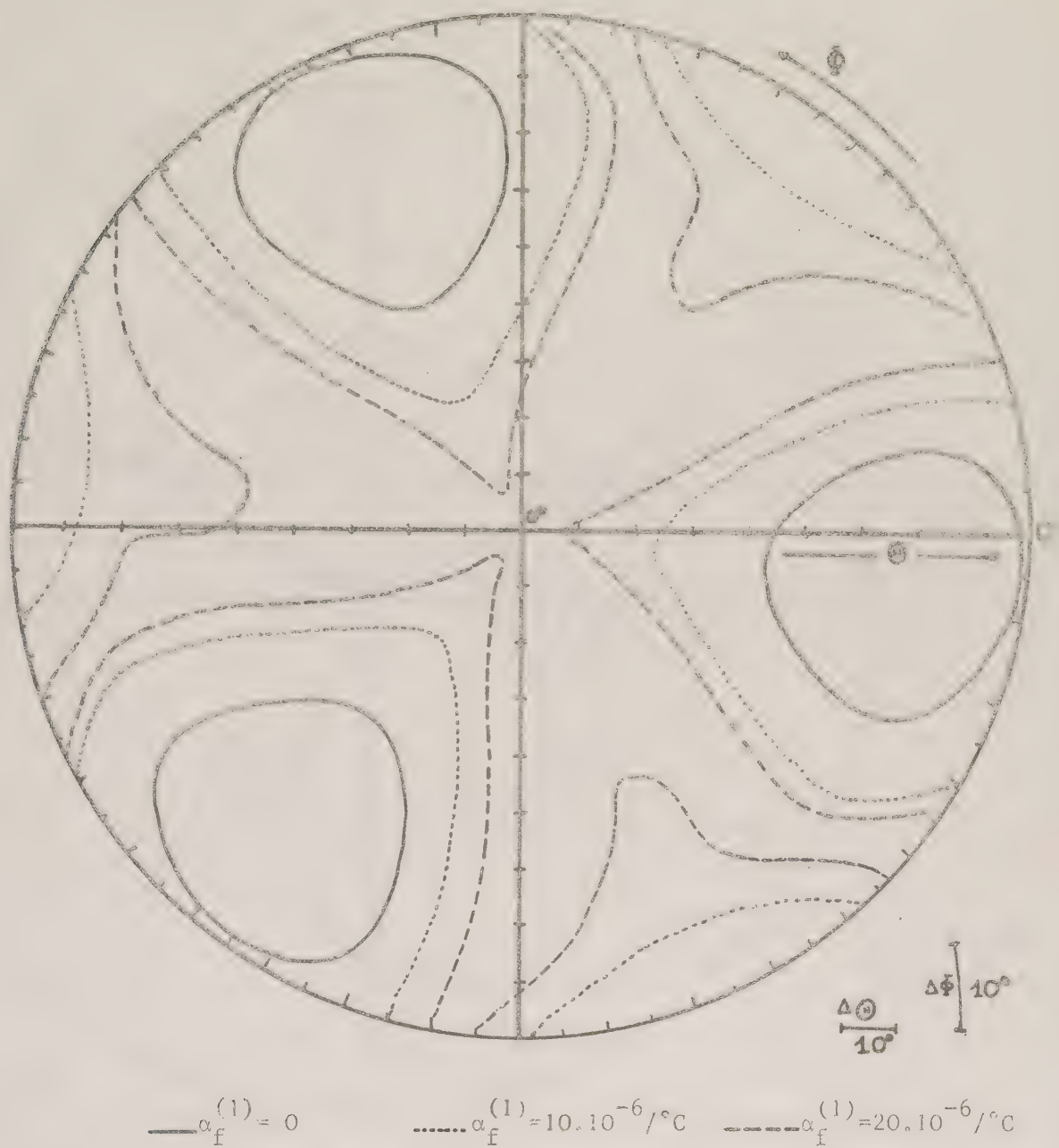


Fig. 32

COEFFICIENT DE TEMPERATURE DU 2e ORDRE $\alpha_f^{(2)}$

$$\Psi = 9^\circ$$

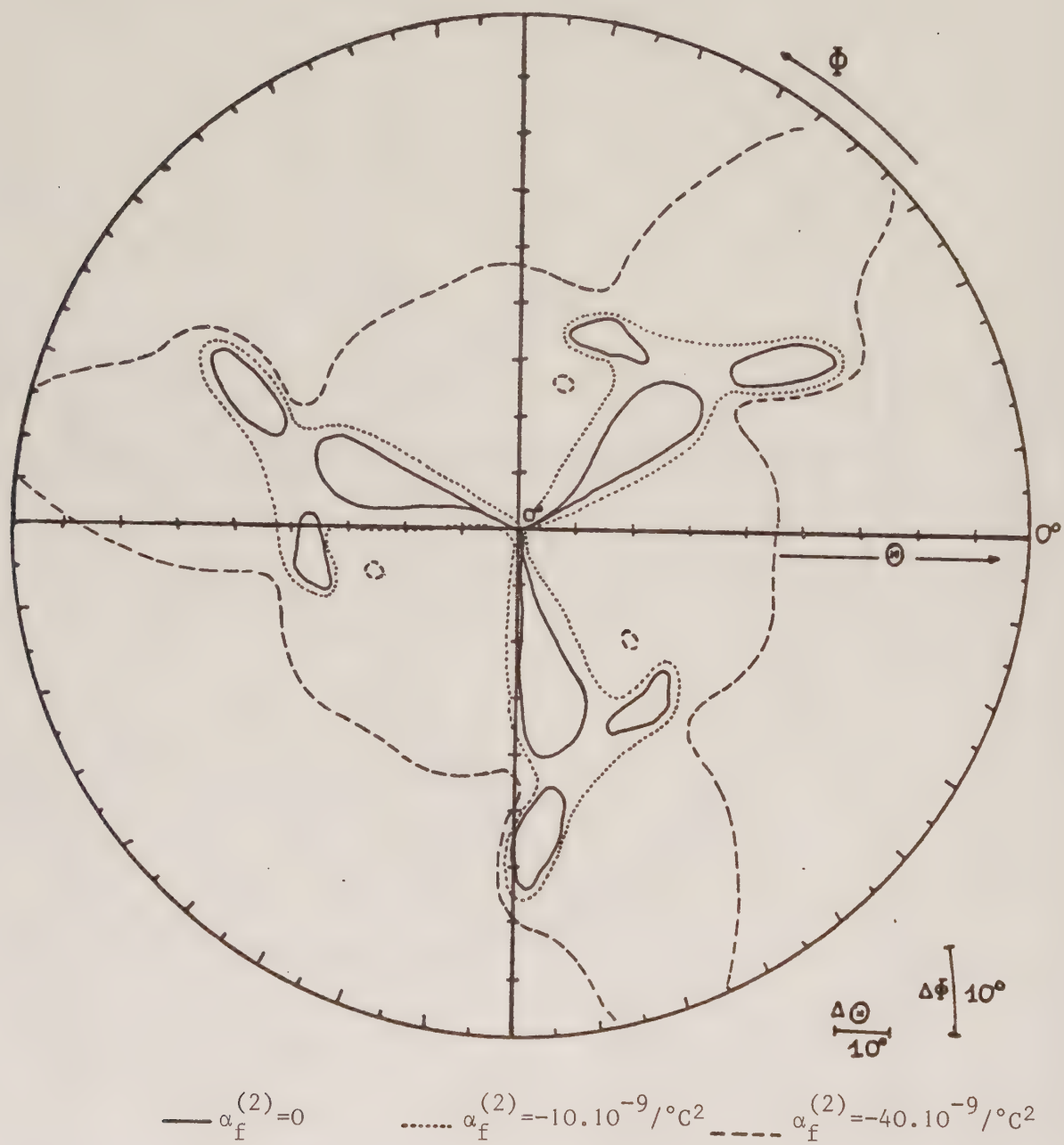
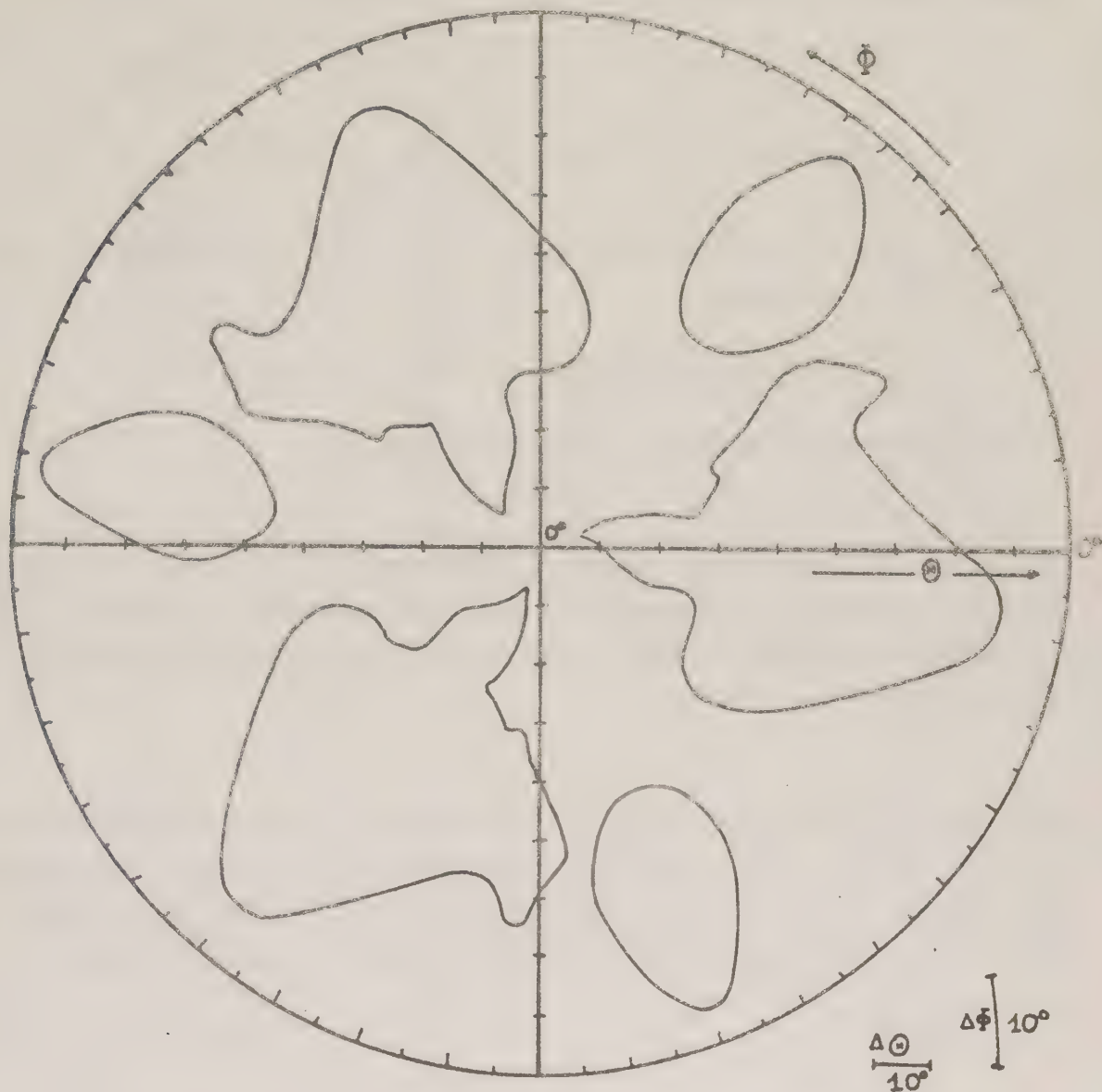


Fig. 33

COEFFICIENT DE TEMPERATURE DU 3e ORDRE $\alpha_f^{(3)}$

$$\Psi = 9^\circ$$



$$\alpha_f^{(3)} = 0$$

Fig. 34

Le temps de calcul nécessaire à l'obtention de ces représentations a été écourté en tenant compte des propriétés de symétrie du cristal, qui se résument ainsi pour le quartz :

$$\alpha_f^{(n)}(\Phi, \Theta, \Psi) = \alpha_f^{(n)}\left(\Phi + \frac{2\pi}{3}, \Theta, \Psi\right) = \alpha_f^{(n)}\left(\Phi + \frac{4\pi}{3}, \Theta, \Psi\right)$$

$$\alpha_f^{(n)}(\Phi, -\Theta, \Psi) = \alpha_f^{(n)}(\pi - \Phi, \Theta, \Psi) \quad \text{avec } 0^\circ \leq \Theta \leq 90^\circ$$

Pour les valeurs de Ψ comprises entre 0° et -90° , doivent être utilisées les relations suivantes :

$$\alpha_f^{(n)}(\Phi, \Theta, -\Psi) = \alpha_f^{(n)}(-\Phi, \Theta, \Psi) \quad \text{avec } 0^\circ \leq \Psi \leq 90^\circ$$

les symétries précédentes étant conservées.

Remarque : Le temps de calcul sur l'ordinateur IRIS 50, pour une coupe (Φ, Θ) et une direction de propagation Ψ , donc pour un point du graphique, est d'environ cinq secondes. Le temps total est d'environ dix heures de calculs pour près de sept mille points.

Ces figures font apparaître un certain nombre de points intéressants tels que ceux où $\alpha_f^{(2)}$ et $\alpha_f^{(3)}$ sont nuls simultanément, la fréquence variant alors linéairement avec la température, ou ceux où $\alpha_f^{(1)}$ et $\alpha_f^{(2)}$ s'annulent en même temps, les coupes étant alors peu sensibles à la température.

Coefficients de température du second et troisième ordre nuls

Si les coefficients de température du second et troisième ordre s'annulent simultanément, la caractéristique "fréquence-température" correspondante sera linéaire et donnera la possibilité d'utiliser la ligne à retard comme capteur de température. Cette application ne sera cependant possible que si le coefficient du premier ordre reste suffisamment grand.

Parmi les quelques coupes pour lesquelles $\alpha_f^{(2)}$ et $\alpha_f^{(3)}$ sont nuls simultanément et que nous avons mises en évidence, nous avons retenu plus particulièrement celle qui correspond à la coupe LST de la figure (39).

COEFFICIENTS DU 1er, 2e et 3e ORDRE NULS

$$\Psi = 0^\circ$$

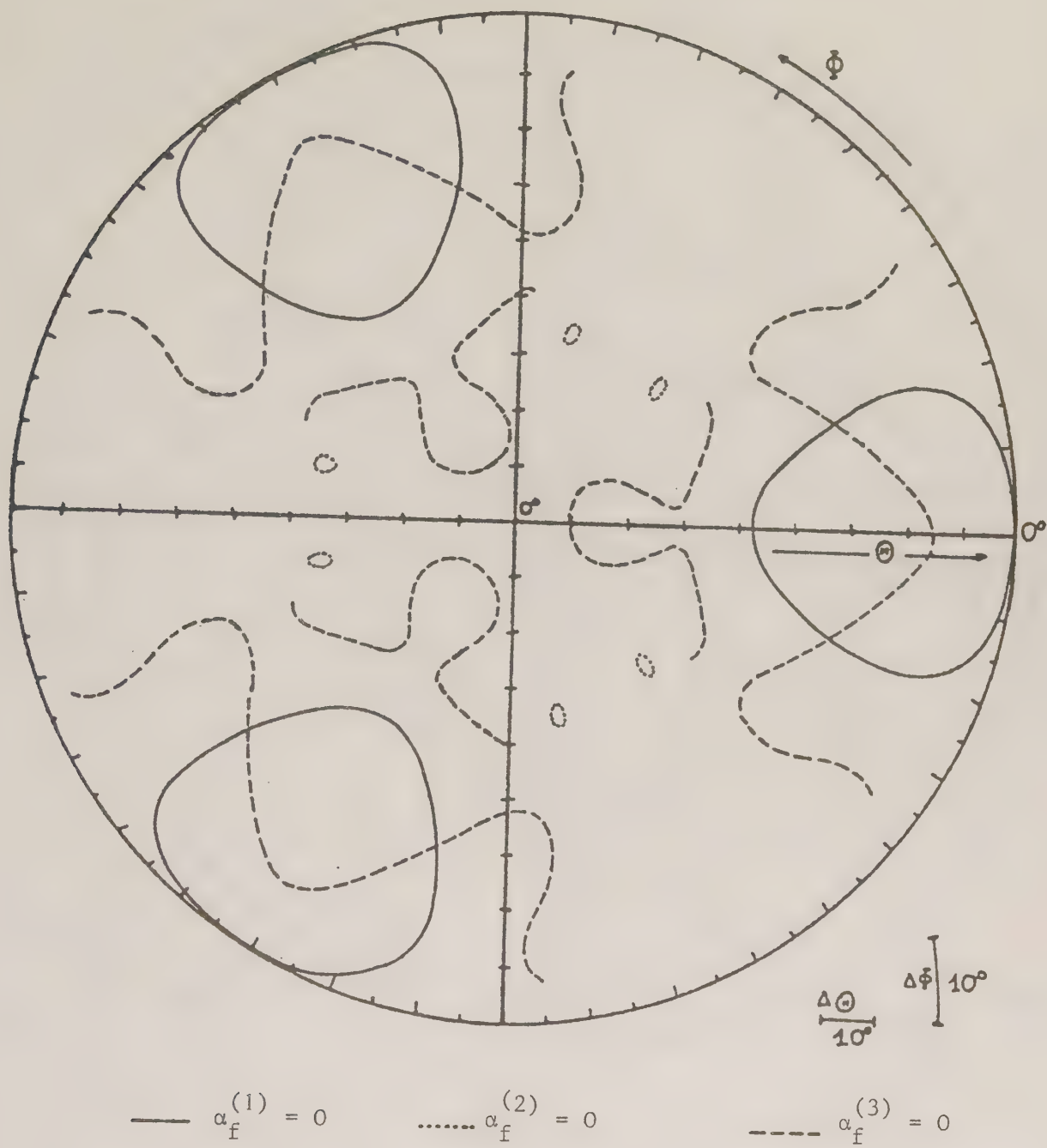
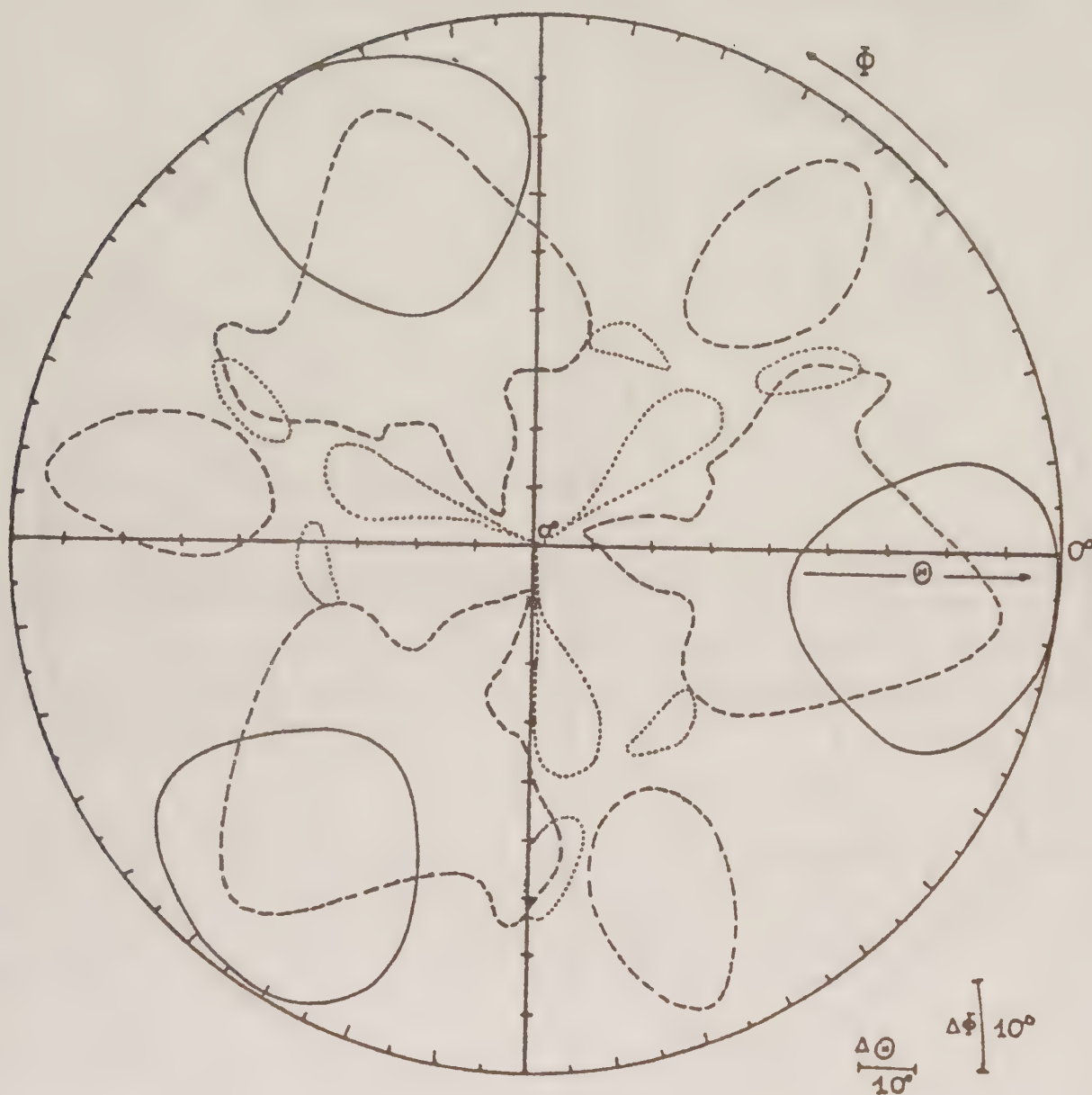


Fig. 35

$$\Psi = 9^\circ$$



$$\text{—} \alpha_f^{(1)} = 0$$

$$\cdots \alpha_f^{(2)} = 0$$

$$\text{---} \alpha_f^{(3)} = 0$$

Fig. 36

COEFFICIENTS DU 1er, 2e et 3e ORDRE NULS

$$\psi = 18^\circ$$

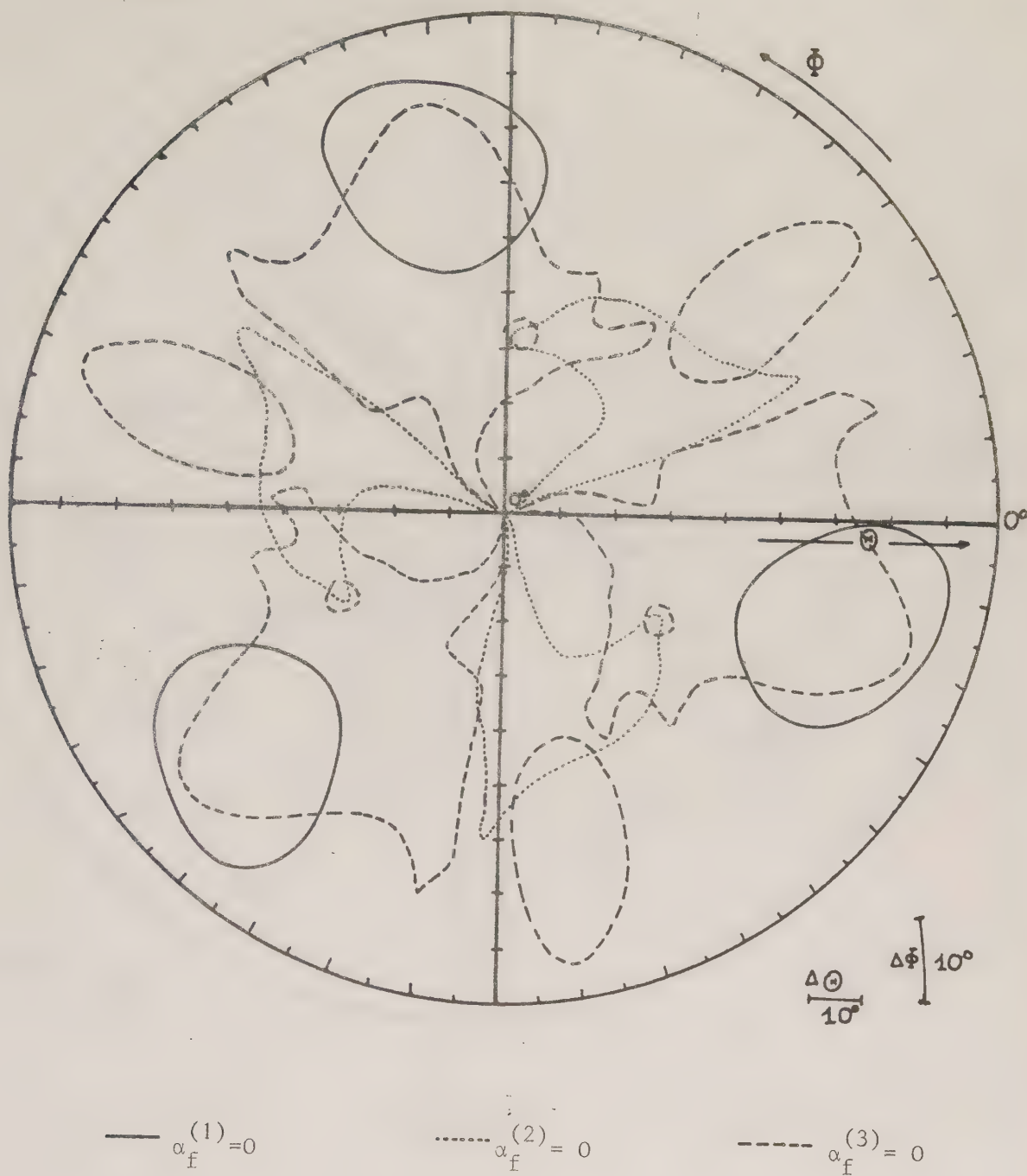


Fig. 37

COEFFICIENTS DU 1er, 2e et 3e ORDRE NULS

$$\Psi = 27^\circ$$

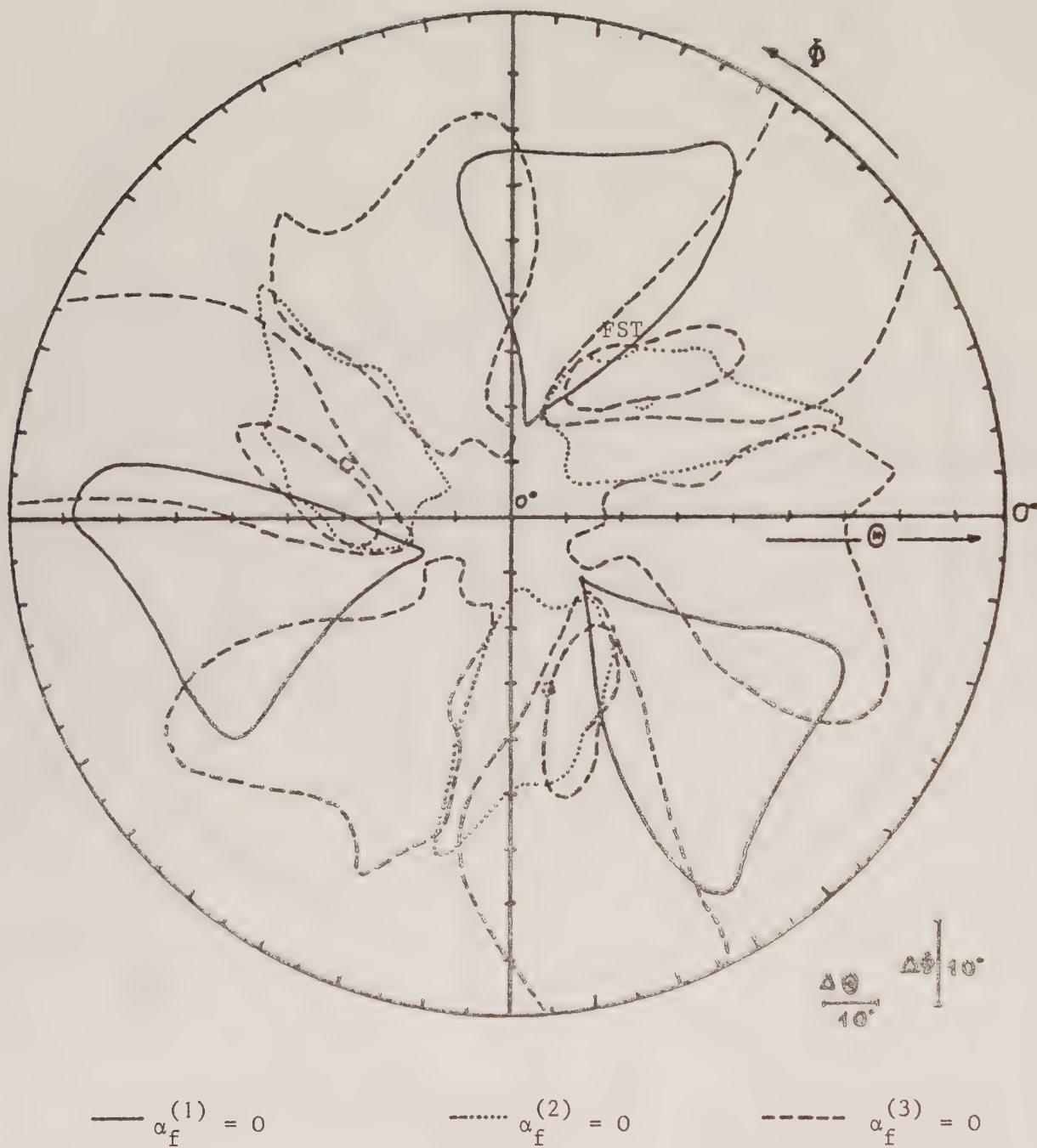


Fig. 38

COEFFICIENTS DU 1er, 2e et 3e ORDRE NULS

$$\Psi = 36^\circ$$

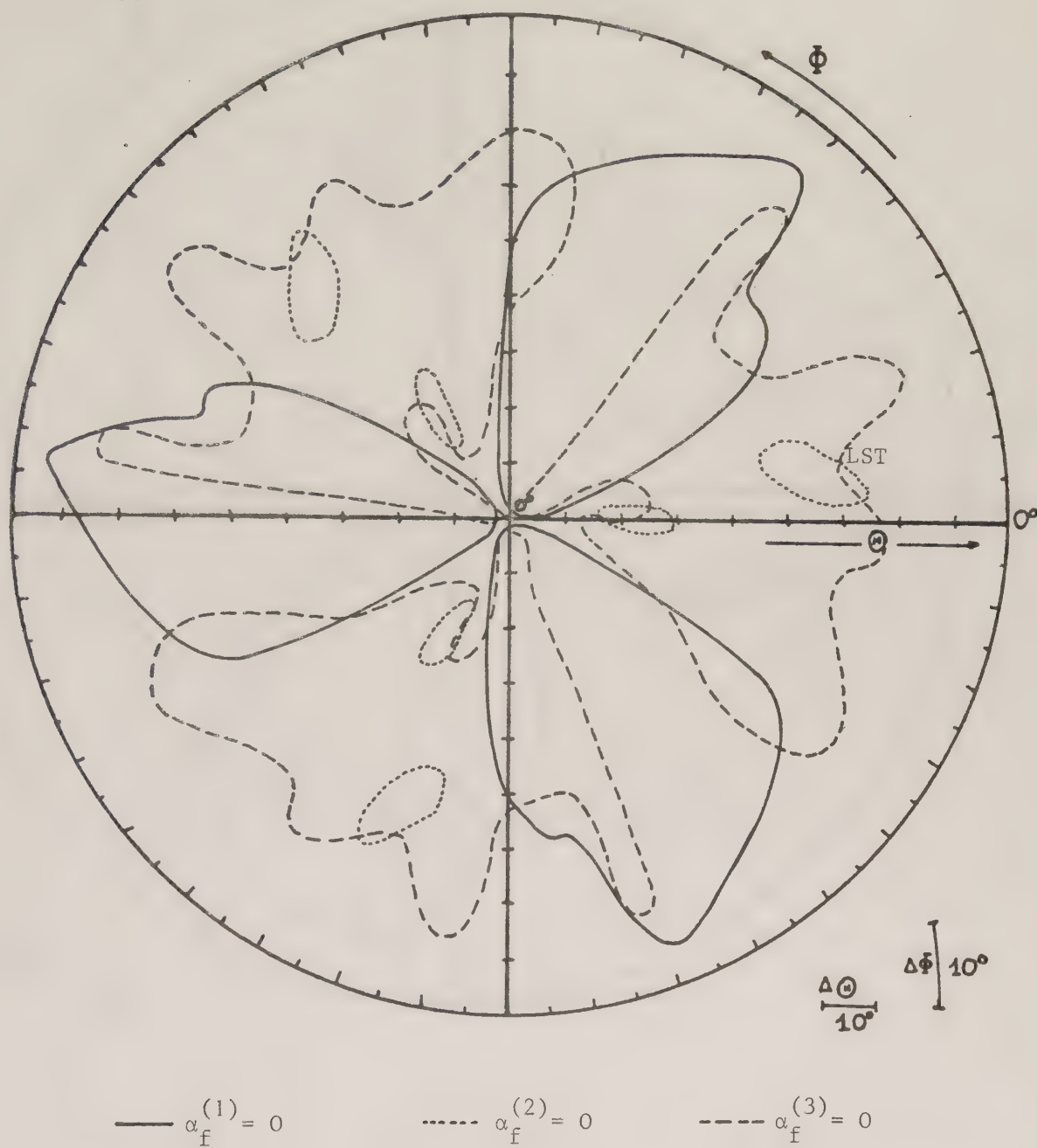
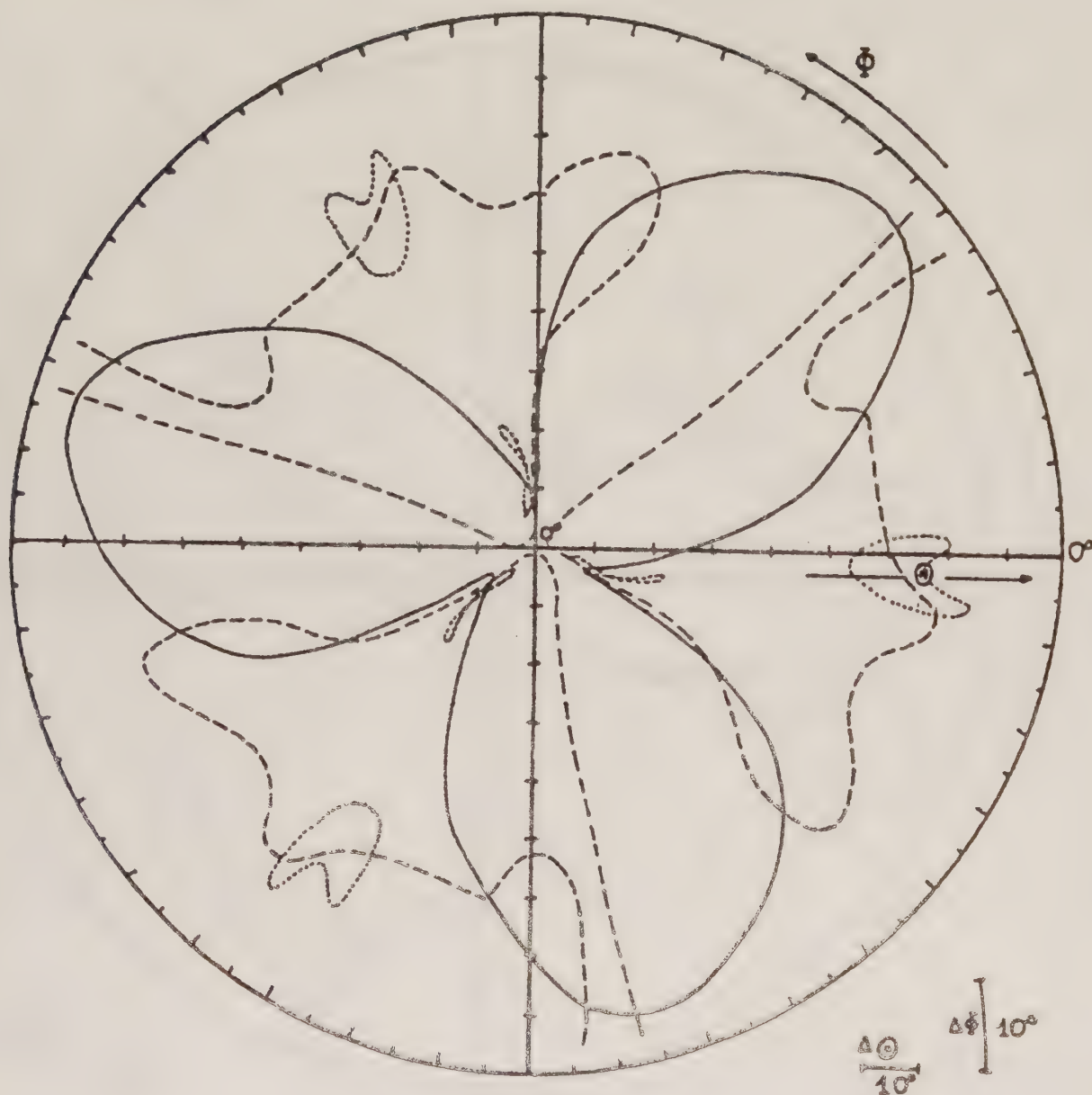


Fig. 39

COEFFICIENTS DU 1er, 2e et 3e ORDRE NULS

$$\Psi = 45^\circ$$



$$\text{—} \alpha_f^{(1)} = 0$$

$$\cdots \alpha_f^{(2)} = 0$$

$$\text{---} \alpha_f^{(3)} = 0$$

Fig. 40

COEFFICIENTS DU 1er, 2e et 3e ORDRE NULS

$$\Psi = 54^\circ$$

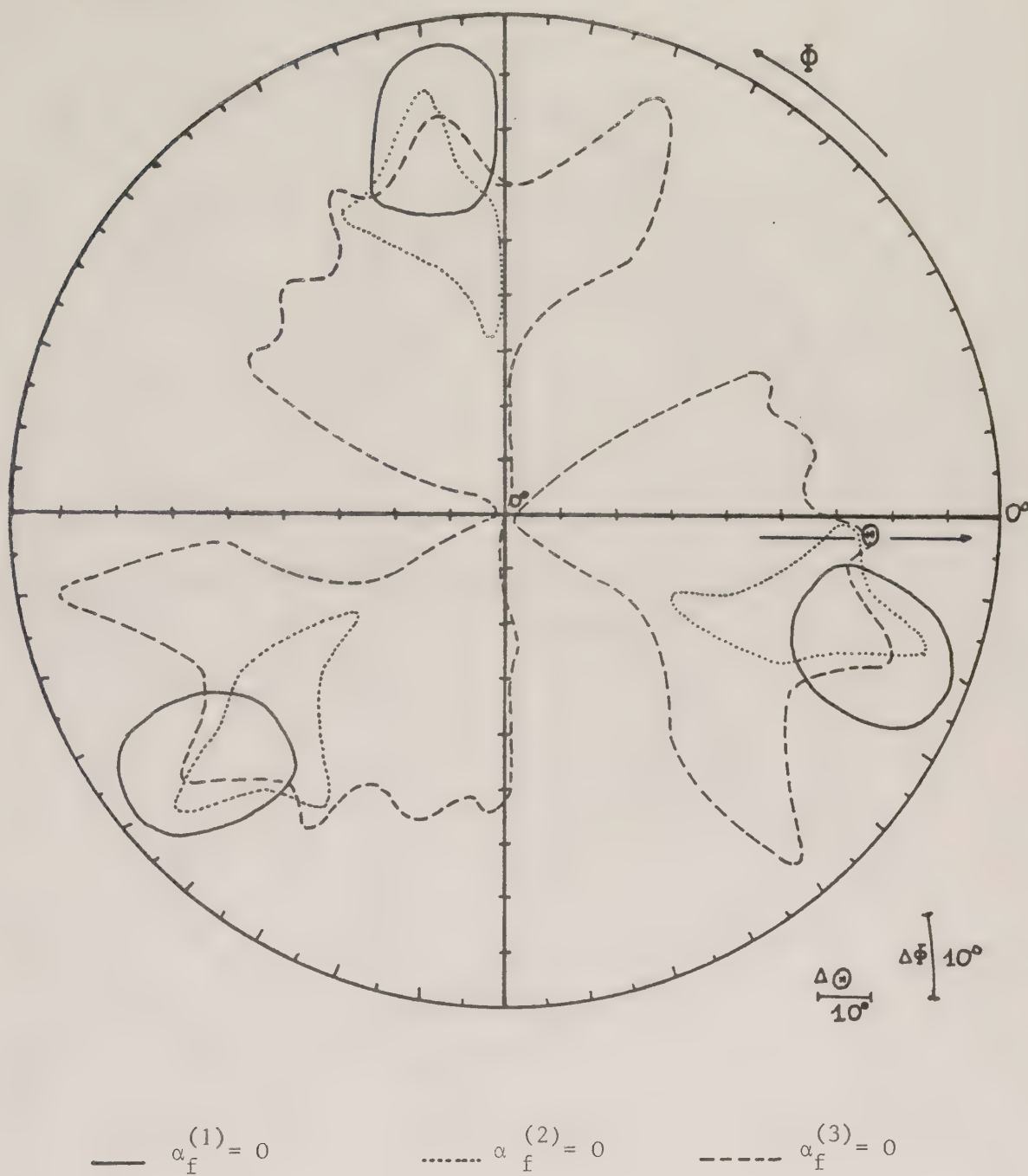
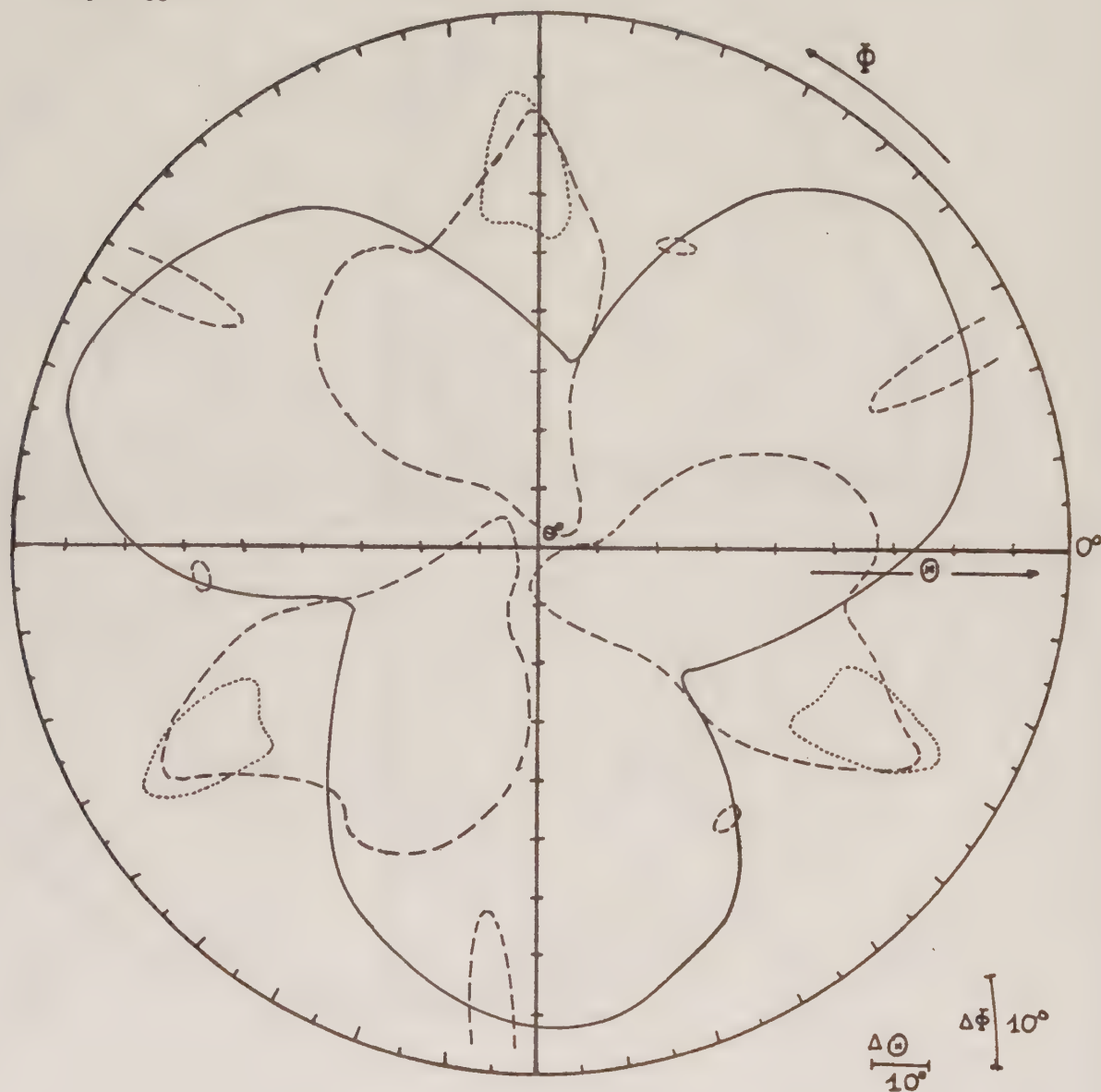


Fig. 41

COEFFICIENTS DU 1er, 2e et 3e ORDRE NULS

$$\Psi = 63^\circ$$



— $\alpha_f^{(1)} = 0$

..... $\alpha_f^{(2)} = 0$

--- $\alpha_f^{(3)} = 0$

Fig. 42

COEFFICIENTS DU 1er, 2e et 3e ORDRE NULS

$$\Psi = 72^\circ$$

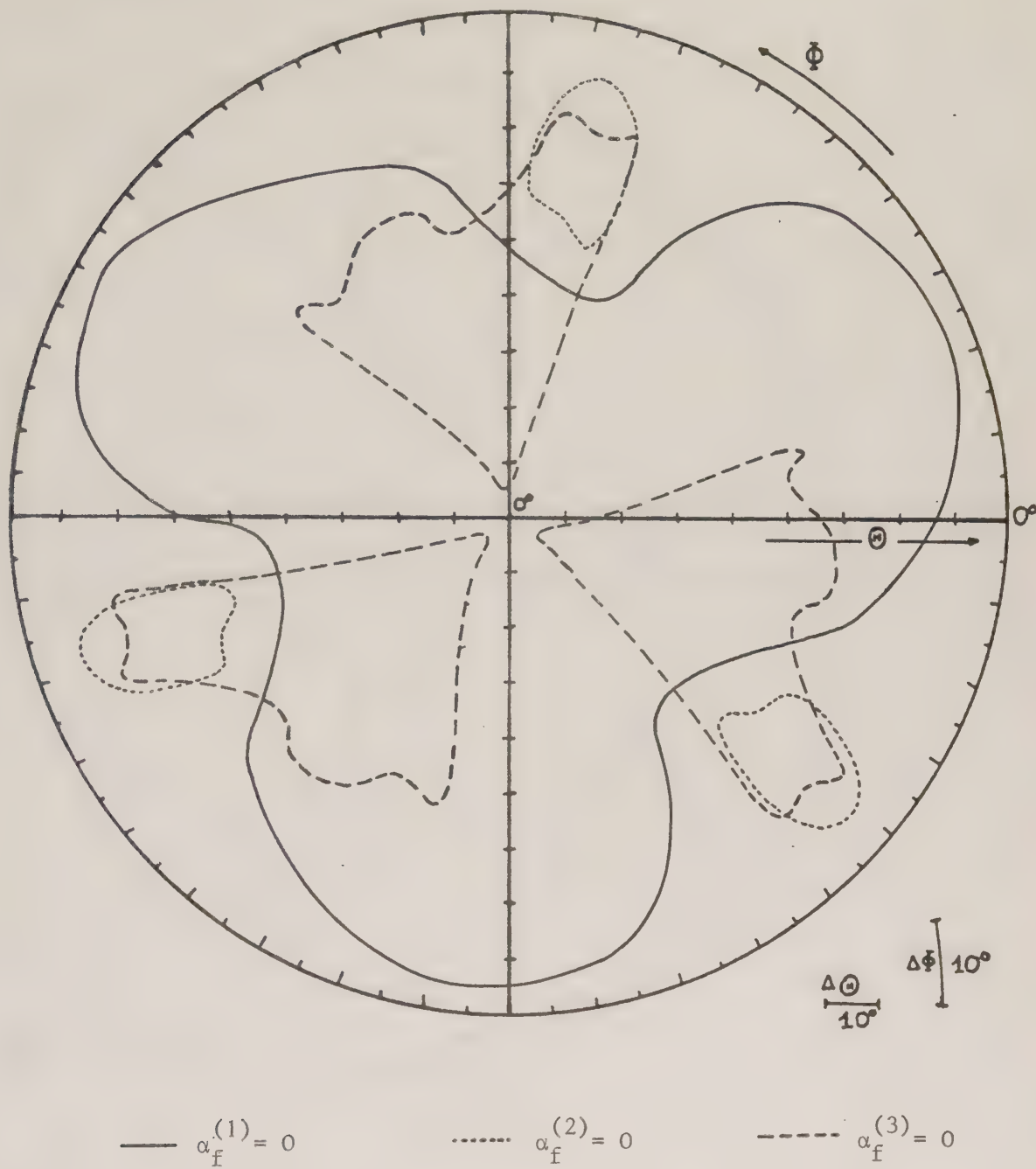
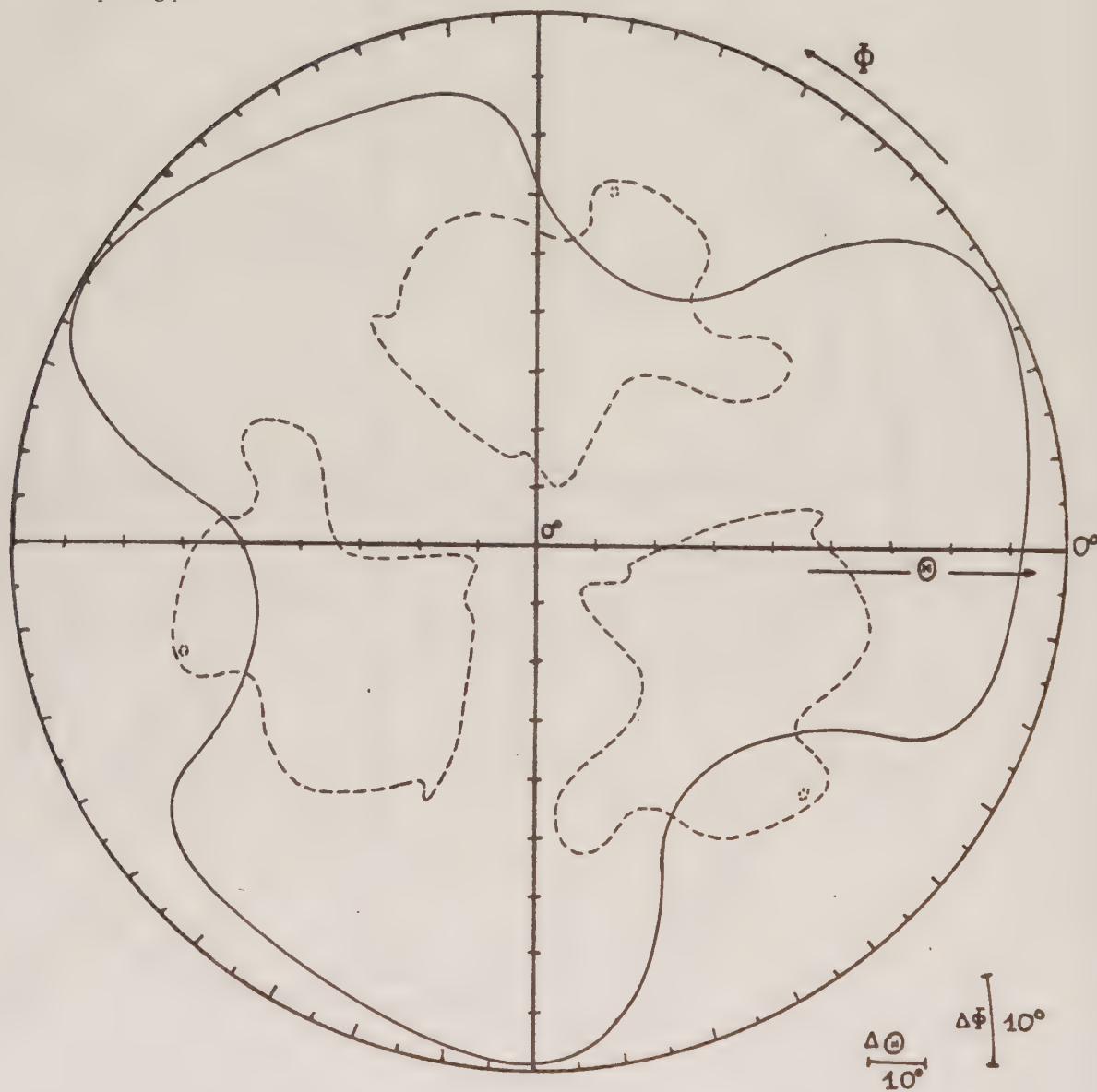


Fig. 43

COEFFICIENTS DU 1er, 2e et 3e ORDRE NULS

$$\Psi = 81^\circ$$



$$\alpha_f^{(1)} = 0$$

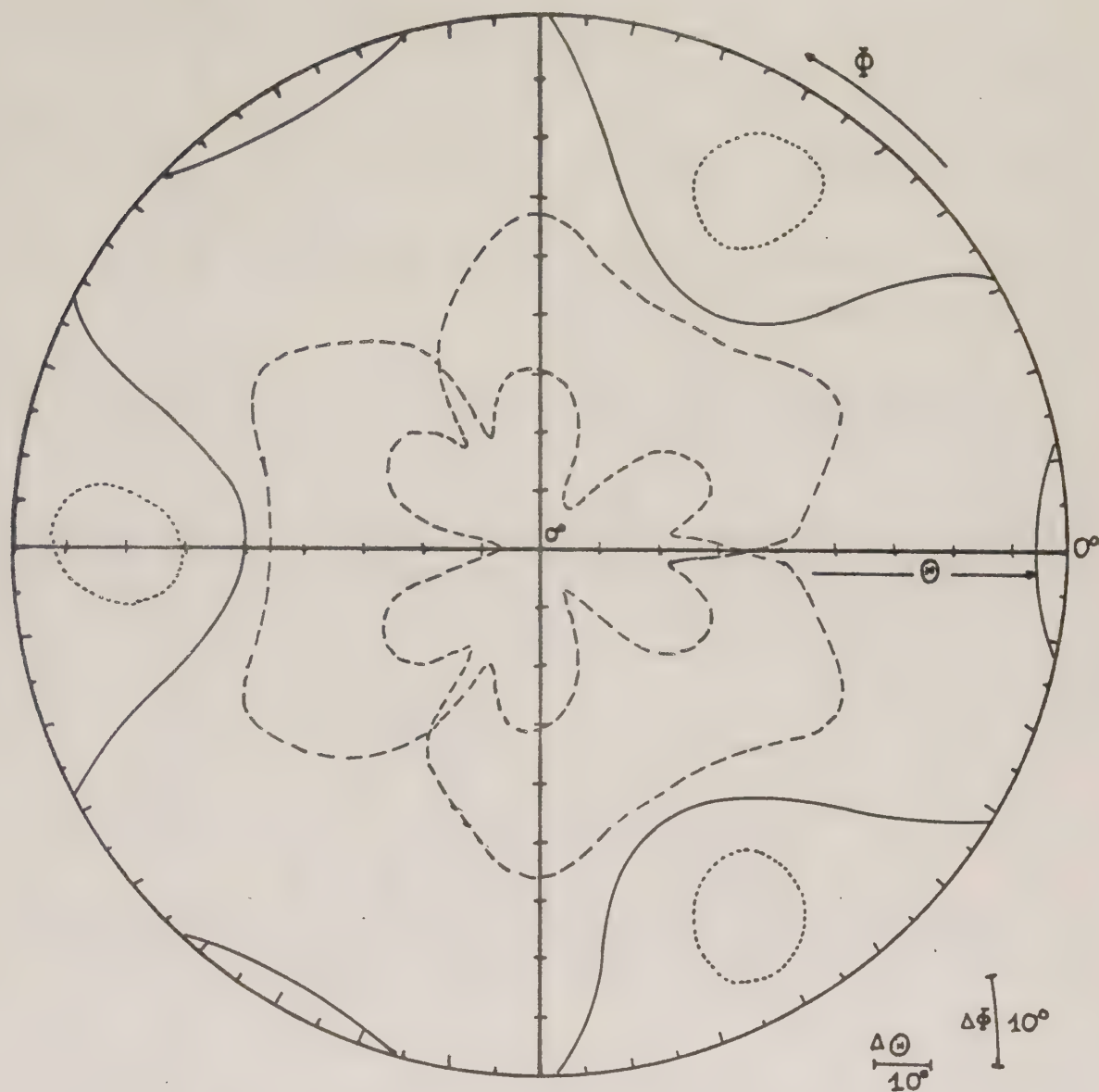
$$\alpha_f^{(2)} = 0$$

$$\alpha_f^{(3)} = 0$$

Fig. 44

COEFFICIENTS DU 1er, 2e et 3e ORDRE NULS

$$\Psi = 90^\circ$$



— $\alpha_f^{(1)} = 0$

..... $\alpha_f^{(2)} = 0$

----- $\alpha_f^{(3)} = 0$

Fig. 45

La direction de propagation Ψ est de 36° et l'orientation correspond environ à $\Phi = 11^\circ$ et $\Theta = 59^\circ$.

La vitesse de phase est de 3 359,9 m/s et ses coefficients de température théoriques correspondants sont :

$$\alpha_f^{(1)} = 40,35 \text{ ppm}/^\circ\text{C} \quad \alpha_f^{(2)} = -0,04 \cdot 10^{-9}/^\circ\text{C}^2 \quad \alpha_f^{(3)} = -0,3 \cdot 10^{-12}/^\circ\text{C}^3$$

Le facteur de couplage électromécanique est égal à 0,09 % et la direction du flux d'énergie Φ' est égale à $-3,3^\circ$.

La figure (46) présente la caractéristique "fréquence-température" correspondante.

Cette coupe a la même sensibilité aux variations de Φ et de Ψ , mais elle est très peu sensible aux variations de Θ comme le montre le tableau IV :

	$d \left(\frac{1}{f} \frac{\Delta f}{\Delta T} \right)$
$d\Phi = 1'$	$3,5 \cdot 10^{-3} \text{ ppm}/^\circ\text{C}$
$d\Theta = 1'$	$0,6 \cdot 10^{-3} \text{ ppm}/^\circ\text{C}$
$d\Psi = 1'$	$3,5 \cdot 10^{-3} \text{ ppm}/^\circ\text{C}$

Tableau IV

Ceci indique que les angles Φ et Ψ doivent être définis en pratique avec un plus grand soin que Θ .

Coefficients de température du premier et second ordre nuls

La coupe ST, généralement utilisée dans les lignes et résonateurs à onde de surface, n'a que le premier coefficient de température qui soit nul.

CARACTERISTIQUE FREQUENCE-TEMPERATURE

- COUPE LST -

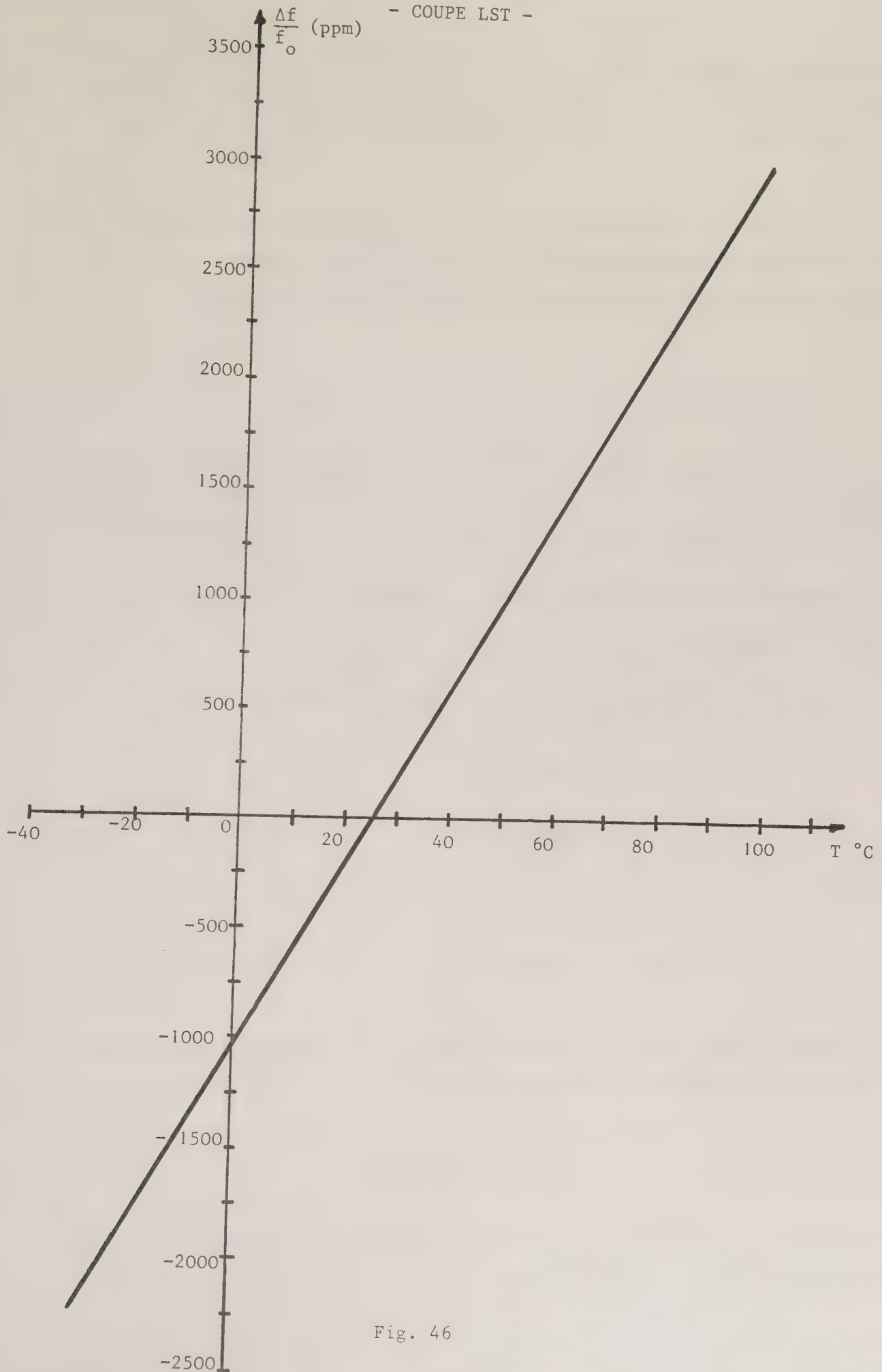


Fig. 46

La recherche de coupes à double rotation présentant les coefficients de température du premier et du second ordre nuls simultanément a donc été effectuée afin d'améliorer les caractéristiques des dispositifs à ondes de surface.

Parmi les lieux des coefficients de température précédents, nous avons mis en évidence une coupe pour laquelle $\alpha_f^{(1)}$ et $\alpha_f^{(2)}$ sont voisins de zéro simultanément. Elle correspond à une direction de propagation de 27° .

Cette coupe, que nous appellerons FST, a des caractéristiques en onde de surface suivantes :

la vitesse de phase est égale à 3 589,2 m/s. Le facteur de couplage électromécanique est équivalent à celui de la coupe ST, soit 0,14 % et la direction du flux d'énergie fait un angle de $3,7^\circ$ avec la direction de propagation.

Les valeurs théoriques des coefficients de température sont les suivantes :

pour la vitesse :

$$\begin{aligned}\alpha_v^{(1)} &= 13 \text{ ppm}/^\circ\text{C} \\ \alpha_v^{(2)} &= 6,05 \cdot 10^{-3} \text{ ppm}/^\circ\text{C}^2 \\ \alpha_v^{(3)} &= -24,5 \cdot 10^{-6} \text{ ppm}/^\circ\text{C}^3\end{aligned}$$

ce qui correspond pour la fréquence à :

$$\begin{aligned}\alpha_f^{(1)} &= 0 \\ \alpha_f^{(2)} &= -0,04 \cdot 10^{-3} \text{ ppm}/^\circ\text{C}^2 \\ \alpha_f^{(3)} &= -22,7 \cdot 10^{-6} \text{ ppm}/^\circ\text{C}^3\end{aligned}$$

Les variations théoriques de fréquence relative $\frac{\Delta f}{f_0}$ restent comprises entre ± 10 ppm dans une gamme de température allant de -25°C à $+75^\circ\text{C}$.

Les courbes présentées sur la figure (47) montrent les caractéristiques fréquence-température pour différentes valeurs de Φ .

La direction de propagation a une influence beaucoup plus grande sur la pente des courbes que les angles de coupe.

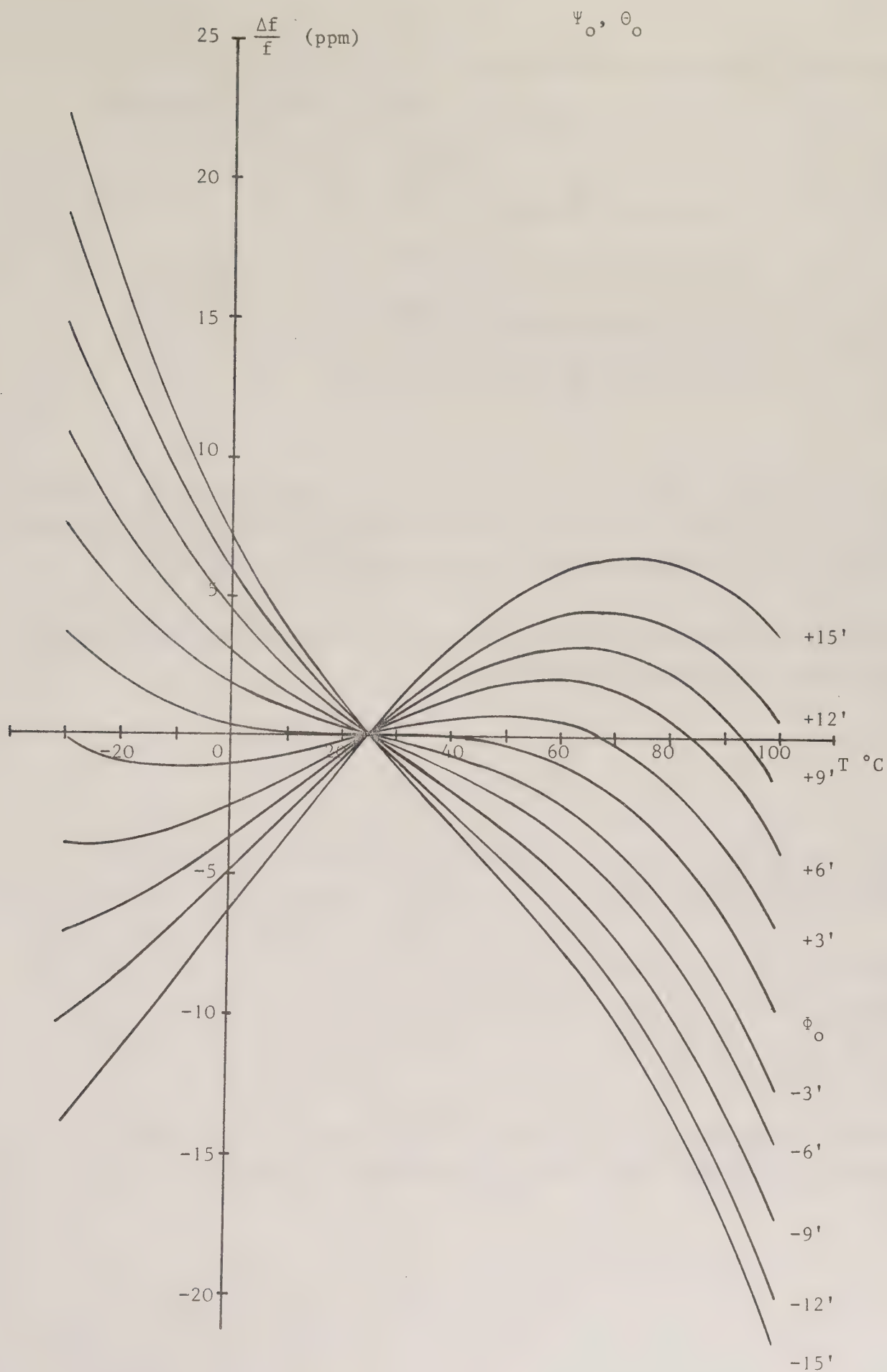


Fig. 47

Le tableau V résume ces différents effets des variations de Φ , Θ et Ψ :

	$d \left(\frac{1}{f} \frac{\Delta f}{\Delta T} \right)$
$d\Phi = 1'$	$16 \cdot 10^{-3} \text{ ppm/}^\circ\text{C}$
$d\Theta = 1'$	$2,2 \cdot 10^{-3} \text{ ppm/}^\circ\text{C}$
$d\Psi = 1'$	$60 \cdot 10^{-3} \text{ ppm/}^\circ\text{C}$

Tableau V

Si Θ et Φ ont peu d'influence sur la pente des caractéristiques à la température de référence $T_0 = 25^\circ\text{C}$, la courbure des caractéristiques change assez rapidement comparativement à ce qui se passe pour Ψ .

Ainsi les angles de coupe ont une influence prépondérante sur la valeur du coefficient de température du 2e ordre.

III-2 - ETUDE EXPERIMENTALE

Les valeurs expérimentales des coefficients de température sont obtenues en traçant la caractéristique fréquence-température d'un oscillateur réalisé à l'aide de la ligne à onde de surface, soit par "bouclage" direct, soit par asservissement de phase.

De cette caractéristique, les coefficients de température du premier et du second ordre peuvent être déduits par régression polynomiale.

Oscillateur à ligne à retard

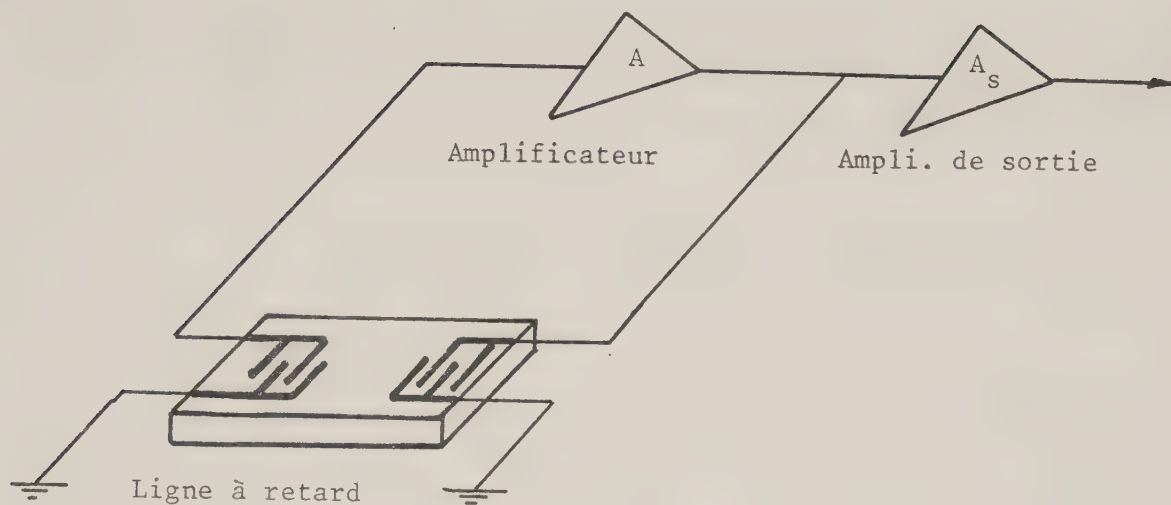


Fig. 48

Les conditions d'oscillations sont remplies si le gain A de l'amplificateur est suffisant pour compenser les pertes et si la phase totale de la boucle d'oscillation est égale à un multiple entier de 2π .

$$A > \sum P = P_i + P_s + P_b + P_d \quad \text{III-12}$$

P_i : pertes d'insertion

P_s : pertes dues à la propagation sur le substrat

P_b : pertes dues à la bidirectionnalité des transducteurs (6 dB)

P_d : pertes de diffraction engendrant des ondes parasites de volume.

$$\phi_A + \phi_L = 2 k \pi \quad \text{III-13}$$

ϕ_A est le déphasage introduit par l'amplificateur, les circuits d'adaptation et les transducteurs.

ϕ_L est le déphasage dû au retard de la ligne.

La stabilité relative est de l'ordre de quelque 10^{-9} sur la seconde.

D'un point de vue pratique, cette méthode ne permet pas de contrôler parfaitement les variations éventuelles de phase dans la boucle, dues aux variations de température.

Oscillateur asservi en phase sur la ligne à retard

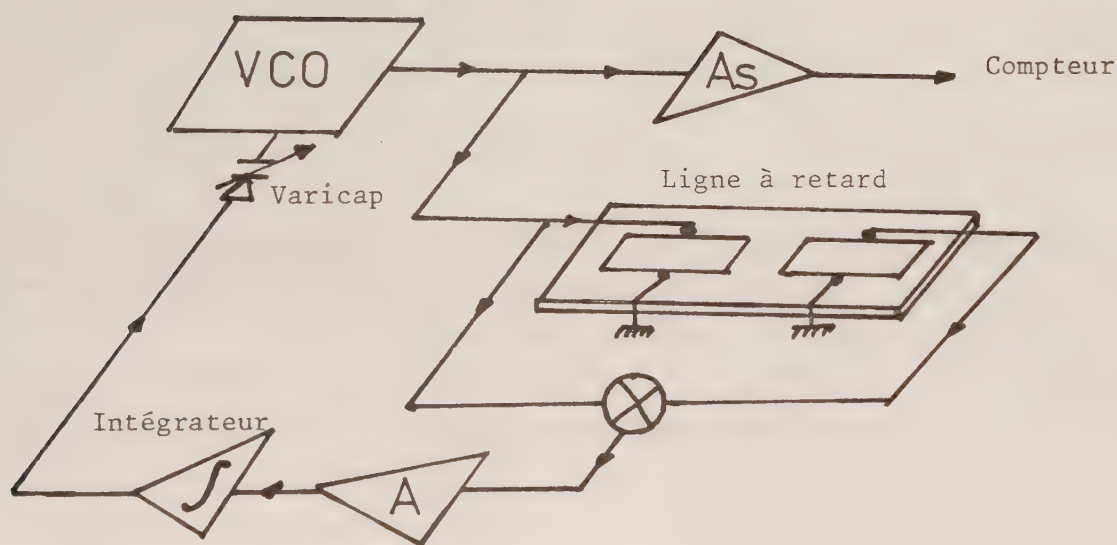


Fig. 49

L'oscillateur VCO est asservi en phase sur la ligne à retard par une boucle intégrant les variations de déphasage entre le transducteur d'entrée et celui de sortie. Les variations de tension à la sortie de l'intégrateur sont appliquées sur la diode à capacité variable d'accord du VCO. Ainsi, toute variation du déphasage de la ligne est mesurée par l'intermédiaire de la fréquence de l'oscillateur.

Par cette méthode, nous contrôlons parfaitement non seulement la fréquence du signal, mais aussi le niveau d'attaque de la ligne. Les conditions de mesure sont plus favorables que lors de l'utilisation d'un amplificateur bouclé directement sur la ligne.

Mesure de la caractéristique "fréquence-température"

La ligne étant soumise aux variations de température, la condition de phase est telle que toute modification de la vitesse et de la longueur se traduit par une variation correspondante de la fréquence suivant la relation :

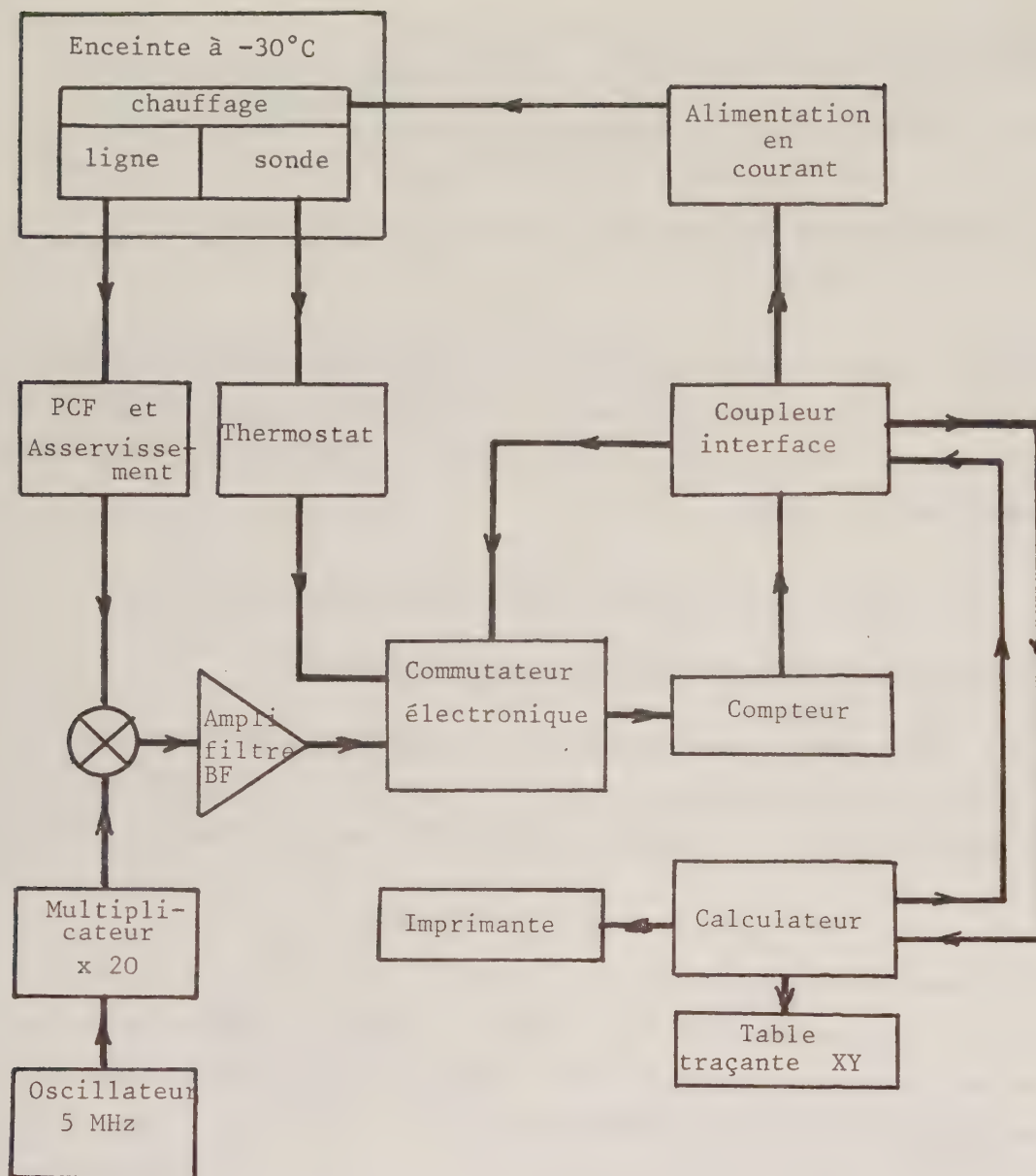
$$\Phi_L = \omega \tau = \omega \frac{L}{V} = \text{constante}$$

Dans le dispositif de mesure qui a été utilisé, seule la ligne à retard est soumise aux variations de la température, l'électronique d'asservissement étant conservée à la température ambiante.

La figure (50) représente le schéma de principe du dispositif automatique de mesure de la caractéristique de la ligne à retard.

Cette dernière est placée dans une enceinte à température contrôlée, constituée d'un cylindre d'aluminium qui est chauffé au moyen d'un enroulement résistif bobiné sur toute sa surface latérale. Cette enceinte est placée dans un congélateur qui permet de disposer d'une température initiale proche de -30°C .

La sonde thermométrique est un résonateur à quartz à onde de volume. Elle permet de mesurer à chaque instant la valeur de la température à l'intérieur du boîtier contenant la ligne avec une précision égale à $0,001^{\circ}\text{C}$. Cette sonde de température est placée dans un oscillateur qui délivre donc une



DISPOSITIF DE MESURE DE LA CARACTERISTIQUE
FREQUENCE-TEMPERATURE

Fig. 50

fréquence proportionnelle à la température à mesurer. Un commutateur électronique permet de compter alternativement la fréquence de la ligne à onde de surface et la fréquence proportionnelle à la température. Un calculateur commande d'une part le basculement du commutateur sur l'une ou l'autre des voies et d'autre part le chauffage de l'enceinte après la prise des deux informations.

Nous obtenons ainsi, soit les valeurs de la fréquence à certaines températures fixes, soit directement la caractéristique "fréquence-température".

Coefficients de température expérimentaux

A partir des valeurs enregistrées, nous calculons les variations relatives de fréquences :

$$\frac{\Delta f(T)}{f_0} = (f(T) - f_0) / f_0$$

correspondant aux variations de température autour de la température de référence T_0 .

La méthode de régression polynomiale donne les valeurs des coefficients de température $\alpha_f^{(1)}$ et $\alpha_f^{(2)}$.

III-2-2 - RESULTATS ET APPLICATIONS

Les résultats présentés ici correspondent plus particulièrement, d'une part à la recherche expérimentale de coupes à faibles coefficients de température du premier et deuxième ordre et d'autre part à l'étude de lignes à caractéristique fréquence-température linéaire et de grande sensibilité.

Coupes à faibles coefficients de température

La figure (51) représente la caractéristique expérimentale fréquence-température de la coupe FST (déterminée préalablement par la théorie) pour des températures comprises entre -25°C et 100°C .

CARACTERISTIQUE FREQUENCE-TEMPERATURE EXPERIMENTALE

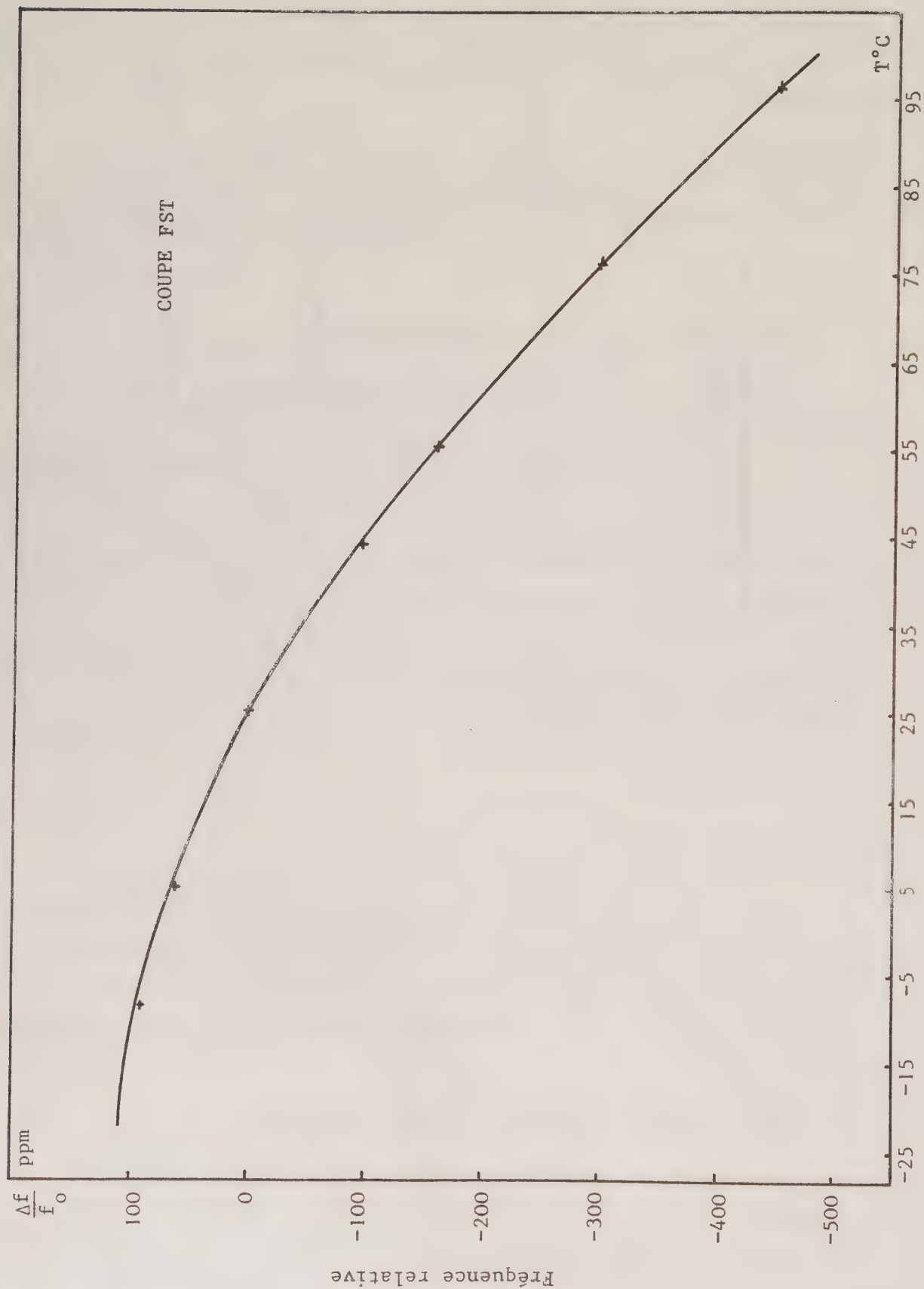


Fig. 51

Ses caractéristiques sont les suivantes :

fréquence mesurée 99,68 MHz (fréquence calculée 99,70 MHz)

pertes d'insertion (sans adaptation) -20,2 dB

coefficients de température mesurés :

$$\alpha_f^{(1)} = -4,1 \text{ ppm/}^\circ\text{C} \quad \alpha_f^{(2)} = -29.10^{-9}/^\circ\text{C}^2$$

On peut constater que la caractéristique est différente de celle que laissait prévoir la théorie et qu'en particulier le coefficient de température du 1er ordre n'est pas nul à 25°C.

Des mesures ont ensuite été effectuées avec le même substrat pour différentes valeurs de la direction de propagation. Cette exploration a permis de retrouver la direction pour laquelle le coefficient de température s'annule. On observe en effet un écart entre théorie et expérience qui peut être attribué, d'une part à l'imprécision avec laquelle sont connues les valeurs des constantes du matériau, et d'autre part à certains effets parasites dus au montage et qui ne sont pas suffisamment maîtrisés (effets de boîtier, de câbles).

La surcharge due aux électrodes métalliques déposées et la modification des conditions aux limites électriques qu'elles entraînent ont également une influence. En effet, en étudiant les coupes à simple rotation, nous avons remarqué que la métallisation entraîne une variation des coefficients de température qui se traduit systématiquement par un décalage du point d'inversion de la caractéristique fréquence-température. Ainsi, la caractéristique de la coupe ST est décalée de dix degrés vers les basses températures lorsque l'épaisseur de la couche d'aluminium est d'environ 2000 Å.

A partir de la coupe définie théoriquement, nous avons entrepris une recherche de la configuration du quartz qui, tout en annulant le coefficient de température du premier ordre, donne aussi une valeur la plus faible possible du deuxième ordre.

La valeur de la direction de propagation Ψ annulant le coefficient de température du 1er ordre $\alpha_f^{(1)}$ de la coupe FST ayant été maîtrisée, l'étape suivante consiste à déterminer les valeurs optimales des paramètres angulaires (Φ et Θ) définissant la coupe, afin de diminuer à son tour la valeur du coefficient du 2e ordre.

COMPARAISON DES CARACTERISTIQUES "FREQUENCE-TEMPERATURE" EXPERIMENTALES
DES COUPES EXPERIMENTALES "FST" et "ST,X"

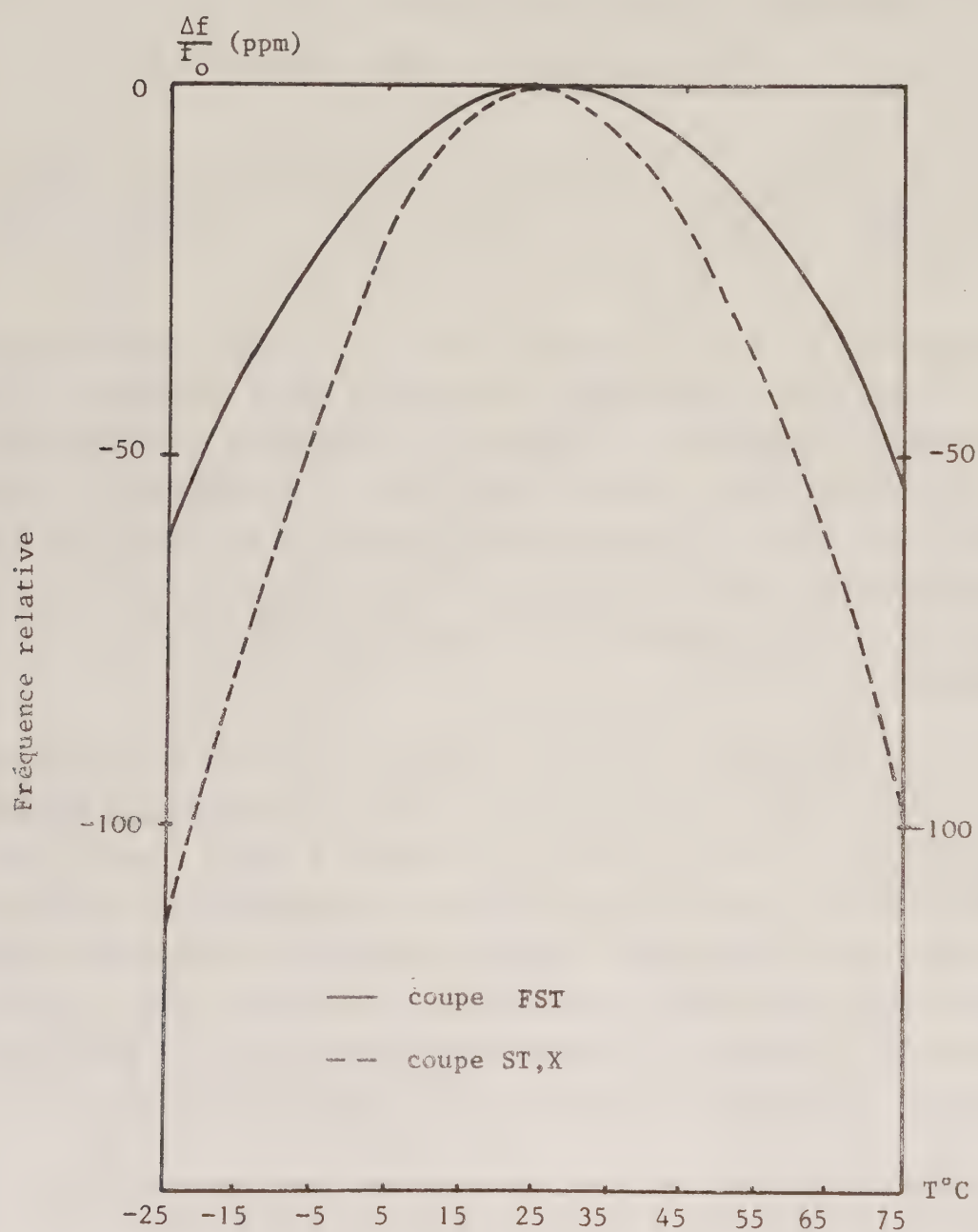


Fig. 52

On observe que, pour des variations de quelques degrés des angles Φ ou Θ autour des valeurs de la coupe FST, le coefficient de température du 2e ordre $\alpha_f^{(2)}$ varie de façon aléatoire en restant voisin de $-20 \cdot 10^{-9}/^{\circ}\text{C}$. Cependant, et c'est là un point important, $\alpha_f^{(2)}$ est resté inférieur à celui de la coupe ST,X.

Une limitation à cette valeur apparaît. Elle est, semble-t-il, due à la superposition d'effets parasites. Nous pensons qu'il s'agit de l'influence de l'impédance des transducteurs dont les valeurs varient avec la température et induisent un effet du deuxième ordre. Des études sont actuellement en cours pour essayer de mieux maîtriser ces phénomènes parasites : en particulier en améliorant la technologie de fabrication : - optimisation des longueurs et de l'épaisseur d'aluminium - adaptation d'impédance faite dans des conditions optimales à la fois des points de vue électrique et thermique.

Bien que cette première série de lignes réalisée à l'aide de coupes de quartz à double rotation n'ait pas permis d'atteindre complètement les valeurs théoriques, toutes les sensibilités mesurées sont environ 2 fois inférieures à celles de la coupe ST,X comme le montre la figure (52). Ces résultats sont encourageants et les améliorations apportées aux mesures permettent d'espérer l'obtention de performances encore supérieures.

Coupe linéaire en température

L'étude théorique a également mis en évidence la coupe LST dont la caractéristique fréquence-température est linéaire.

La figure (53) représente la caractéristique expérimentale de cette coupe pour des variations de température comprises entre -25°C et 100°C .

Les caractéristiques de la ligne sont les suivantes :

fréquence mesurée : 93,15 MHz fréquence calculée : 93,3 MHz
 pertes d'insertion : 33 dB
 coefficients de température mesurés :

$$\alpha_f^{(1)} = 31 \text{ ppm}/^{\circ}\text{C} \qquad \alpha_f^{(2)} = -2 \cdot 10^{-9}/^{\circ}\text{C}^2$$

CARACTERISTIQUE FREQUENCE-TEMPERATURE EXPERIMENTALE

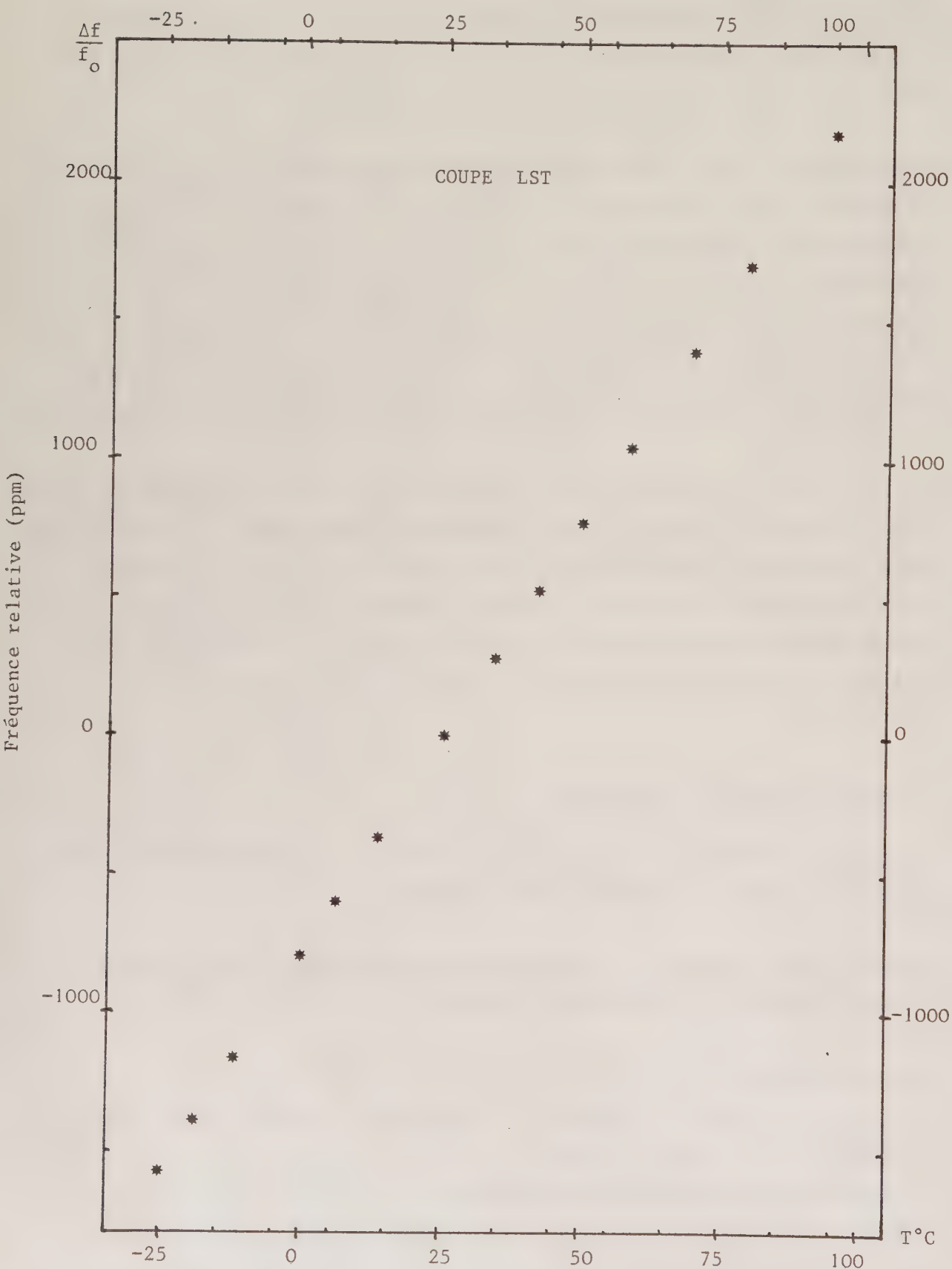


Fig. 53

Une sensibilité suffisante est la première condition requise pour utiliser une telle ligne en capteur de température. La seconde condition est la linéarité sur la gamme de température désirée.

La sensibilité est directement donnée par la valeur du coefficient du premier ordre, ici égal à $31.10^{-6}/^{\circ}\text{C}$, ce qui correspond, avec un oscillateur utilisant une telle sonde et fonctionnant à 100 MHz, à une résolution de $3,2.10^{-4}^{\circ}\text{C/Hz}$.

Le défaut de linéarité est fixé par le rapport $\alpha_f^{(2)}/\alpha_f^{(1)}$ pour une variation de 1°C dans la gamme de température choisie. Sa valeur est ici de $6,4.10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ pour des températures comprises entre 25°C et 100°C .

En outre, la stabilité relative de fréquence de l'oscillateur fixe la résolution ultime du thermomètre. Ainsi à 100 MHz, un oscillateur à onde de surface stable à 10^{-9} sur une seconde conduit à une incertitude de la valeur de la fréquence égale à 0,1 Hz et donc à une résolution meilleure que le $0,0001^{\circ}\text{C}$.

Les stabilités atteintes aujourd'hui sont de l'ordre de $10^{-11}/\text{s}$ à 100 MHz en utilisant un résonateur à onde de surface à la place d'une ligne. La résolution pourrait donc être encore améliorée.

Les principaux avantages offerts par les ondes de surface par rapport aux autres sondes de température sont multiples :

d'une part leur grande sensibilité en mode fondamental et leur fréquence élevée,

d'autre part la conception plane par nature du dispositif permet de diminuer le temps de réponse du capteur du fait de la faible constante de diffusion de la chaleur dans le quartz. Ce temps de réponse devrait pouvoir être ramené à une valeur inférieure à la seconde.

Les études entreprises pour la caractérisation des effets thermiques statiques ont donc conduit à la mise en évidence de coupes de quartz à double rotation qui peuvent, soit apporter des améliorations de la stabilité des oscillateurs ou des filtres haute fréquence à onde de surface, du fait de leur faible sensibilité à la température, soit au contraire permettre d'obtenir les sensibilités maximales pour réaliser des sondes thermométriques.

Cette étude sera poursuivie expérimentalement par la recherche de coupes à double rotation répondant aux critères précédents, en nous efforçant d'améliorer la technologie utilisée pour réduire les phénomènes parasites. Elle sera aussi complétée par une modélisation des effets dynamiques de la température.

CHAPITRE IV

INFLUENCE DES PERTURBATIONS D'ORIGINE MÉCANIQUE

-o0o-

L'étude des effets thermiques a mis en évidence l'influence prépondérante de la coupe du cristal sur sa sensibilité à la température. L'influence de perturbations mécaniques sur le dispositif à onde de surface peut être étudiée de la même façon et en considérant toujours les deux aspects : diminuer la sensibilité en vue d'améliorer la stabilité, ou au contraire l'augmenter pour réaliser des capteurs (35). En fait, dans le cas de perturbations mécaniques, le deuxième aspect de l'étude est celui qui présente le plus d'intérêt.

Parmi toutes les perturbations mécaniques qui peuvent être causes d'instabilités de fréquence des dispositifs, nous distinguerons les pressions hydrostatiques, forces, accélérations, vibrations, etc... Nous nous intéressons dans ce chapitre plus particulièrement aux effets des forces et des accélérations appliquées sur une ligne à retard réalisée avec un substrat de quartz. Si les problèmes non linéaires connaissent certains développements en onde de volume, ils n'ont été que peu étudiés jusqu'à présent dans le cas des ondes de surface (19), (29), (39), (40).

En général, les perturbations mécaniques extérieures présentent des temps de relaxation qui sont grands devant la période de l'onde haute fréquence et on peut donc les considérer comme étant statiques. Ils rendent souvent

inhomogènes les propriétés du cristal et par conséquent le couplage non linéaire entre l'onde H.F. et la précontrainte devient lui aussi inhomogène. En conséquence, l'utilisation de la méthode de perturbation précédemment décrite devient nécessaire.

Dans ce chapitre, après avoir décrit le programme de calcul mis au point pour la méthode de perturbation, nous exposerons une méthode générale permettant d'obtenir les expressions des efforts, déformations et déplacements de la précontrainte statique et que nous avons adaptée au cas des plaques de quartz utilisées pour la réalisation des lignes.

Une seconde partie est consacrée à l'étude expérimentale de l'influence des forces de flexion ou de compression appliquées sur un substrat de quartz de coupe à simple rotation où se propage une onde de RAYLEIGH. Dans un dernier paragraphe, une première contribution à l'étude de la sensibilité aux accélérations est présentée. La raison de cette étude est essentiellement liée aux perspectives d'utilisation des oscillateurs dans le domaine des applications aérospatiales.

Enfin seront présentées les possibilités d'utiliser lignes et résonateurs en jauges de contraintes ou accéléromètres dans des dispositifs de mesure qui traduisent les variations d'une grandeur mécanique en une variation de fréquence, la résolution étant d'autant plus grande que la fréquence de fonctionnement est plus élevée.

IV-1 - VARIATION DE VITESSE DES ONDES DE RAYLEIGH SUR DU QUARTZ

PRECONTRAINTE

Ainsi que nous l'avons montré, l'existence d'une précontrainte dans un cristal entraîne une modification des conditions de propagation de l'onde qui résulte du couplage non linéaire entre le cristal et la précontrainte. En général, les déformations résultantes sont inhomogènes et la variation de vitesse de l'onde est obtenue par la méthode de perturbation présentée.

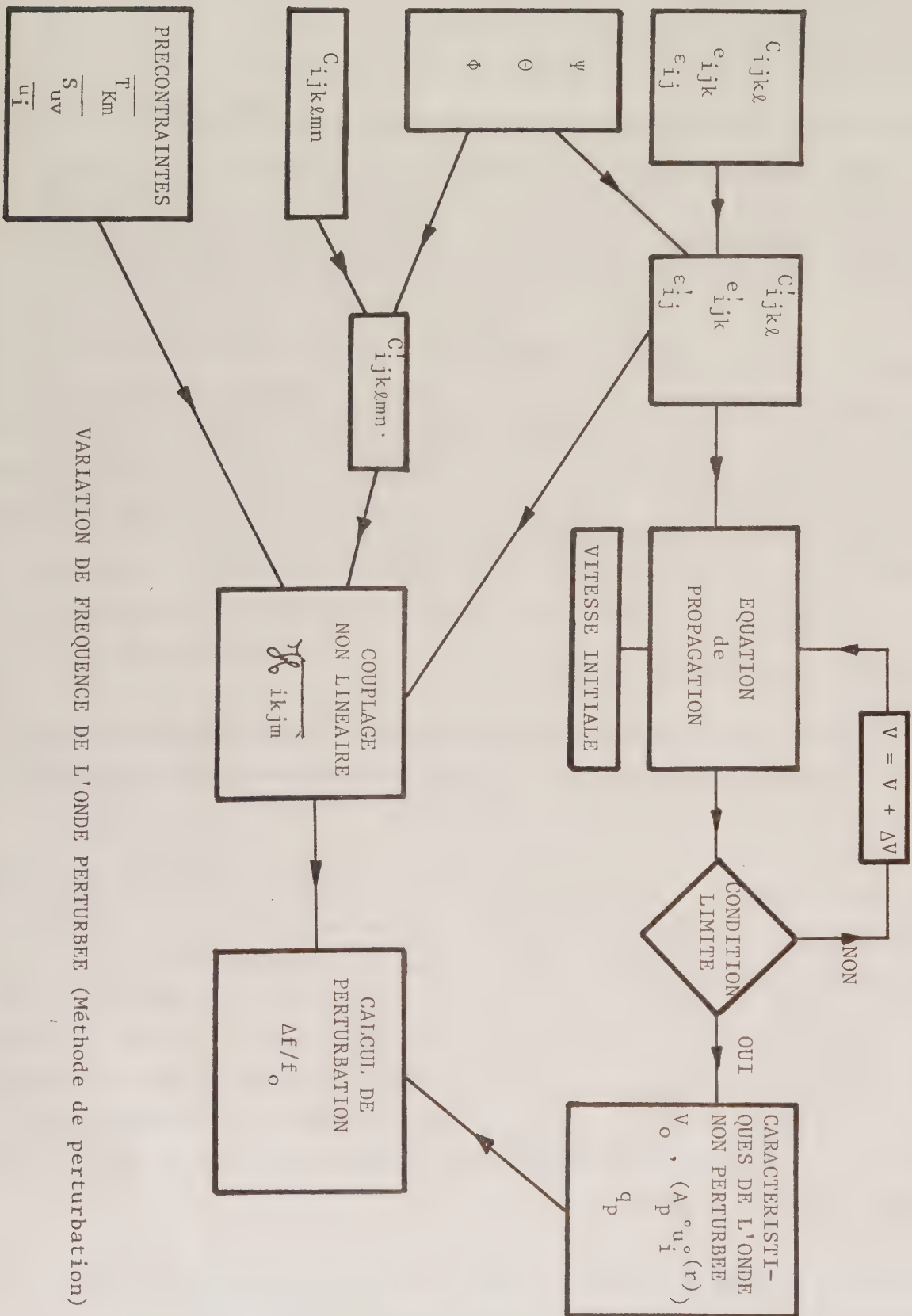
La variation relative de vitesse $\Delta V/V_0$ est calculée en chaque point (a_1, a_3) de la surface en utilisant la relation (II-68). La variation correspondante de fréquence $\Delta f/f_0$ lui est directement égale lorsque le calcul est effectué en utilisant le système d'axes de l'état naturel. En effet, les coefficients élastiques modifiés $\overline{A}_{ikjm}$ calculés dans cet état contiennent implicitement les variations de dimension et de masse spécifique du milieu.

IV-1-1 - ORGANIGRAMME DU CALCUL

La figure (54) représente l'organigramme du calcul de la variation relative de fréquence correspondant à l'application de la précontrainte statique.

Après avoir effectué le calcul des propriétés de l'onde de surface en milieu non déformé pour une configuration (Ψ, Θ, Φ) choisie (cf chapitre I), ainsi que des coefficients élastiques non linéaires du troisième ordre C_{ijklmn} , nous déterminons les efforts, déformations et gradients des déplacements en chaque point du matériau. De ce calcul, nous déduisons les valeurs des constantes élastiques modifiées $\overline{A}_{ikjm}$, puis les valeurs des termes du couplage non linéaire $\overline{B}_{ikjm} = \overline{A}_{ikjm} - C_{ikjm}$. Le sous-programme correspondant à la méthode de perturbation donne directement la variation relative de fréquence en chaque point de la surface.

La variation globale de fréquence correspond à la moyenne des variations de fréquence en chaque point, calculée sur le trajet effectif de l'onde. Il est donc indispensable de calculer la moyenne $\langle \Delta f/f_0 \rangle$ compte tenu des dimensions du substrat et de la disposition des transducteurs.



VARIATION DE FREQUENCE DE L'ONDE PERTURBEE (Méthode de perturbation)

IV-1-2 - CALCUL DES PREDEFORMATIONS

Les méthodes que nous utilisons pour déterminer les expressions des efforts, des déformations et des déplacements dûs à la précontrainte, conduisent à des développements analytiques simples dans le cas de modèles à deux dimensions. On suppose que les dimensions latérales du substrat sont grandes devant son épaisseur et c'est généralement la cas avec les plaques utilisées. Dans ce cas, on peut, avec une bonne approximation, remplacer les efforts et les moments par leurs valeurs moyennes sur toute l'épaisseur de la plaque.

D'une façon générale, les efforts et les déformations sont régis par les équations d'équilibre et l'équation de compatibilité. A ces équations, il faut associer les conditions limites (les surfaces dont la normale est Ox_2 ne sont pas soumises à des contraintes). Les conditions d'encastrement ou de fixation de la plaque imposent aussi des conditions initiales locales comme par exemple l'absence de déplacement en certains points de la lame et des rotations rendues impossibles autour de tel ou tel axe.

Dans la méthode la plus couramment utilisée (28), les efforts statiques sont calculés pour un matériau isotrope. L'anisotropie est introduite par la relation effort-déformation. Il est nécessaire de pouvoir déterminer complètement les expressions des efforts initialement, car les conditions sur les déplacements font alors intervenir l'anisotropie du milieu.

Les études des précontraintes faites dans un premier temps par POISSON et CAUCHY dans le cas des modèles à deux dimensions, puis complétées sous forme d'une méthode variationnelle par KIRCHHOFF (1850), permettent d'écrire les déplacements $\overline{u_i}$ sous la forme d'un polynôme d'ordre n en a_2 lorsque l'épaisseur de la plaque est faible devant sa longueur.

Cette méthode a aussi été développée par MINDLIN 21 pour étudier la vibration des plaques minces de quartz à deux dimensions.

$$\overline{u_i} = \sum_n a_2^n \overline{u_i}^{(n)}(a_1, a_3) \quad \text{IV-1}$$

où les composantes d'ordre n $\overline{u_i}^{(n)}$ ne sont fonctions que de a_1 et a_3 .

Les déformations obtenues par dérivation des déplacements prennent la même forme :

$$\overline{s_{ij}} = \sum_n a_2^n \overline{s_{ij}}^{(n)}(a_1, a_3) \quad \text{IV-2}$$

$$\text{avec } \overline{s}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \left[\overline{u}_{i,j}^{(n)} + \overline{u}_{j,i}^{(n)} + (n+1) (\delta_{2j} \overline{u}_i^{(n+1)} + \delta_{2i} \overline{u}_j^{(n+1)}) \right] \quad \text{IV-3}$$

A l'ordre n du développement des déplacements (ou des déformations) l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\overline{T}_{ij,i}^{(n)} - n \overline{T}_{2j}^{(n-1)} + \overline{F}_j^{(n)} = \rho_0 \sum_m H_{mn} \ddot{u}_j^{(n)} \quad \text{IV-4}$$

où les termes $\overline{T}_{ij}^{(n)}$ sont les valeurs moyennes des moments d'ordre n des efforts calculées sur l'épaisseur $2h$ de la plaque :

$$\overline{T}_{ij}^{(n)} = \int_{-h}^h a_2^n \overline{T}_{ij} da_2 \quad \text{IV-5}$$

$\overline{F}_j^{(n)}$ est la valeur des moments des forces de volume d'ordre n agissant sur les faces situées en $a_2 = \pm h$

$$\overline{F}_j^{(n)} = \left[a_2^n \overline{T}_{2j} \right]_{-h}^h \quad \text{IV-6}$$

H_{mn} est une constante qui dépend de l'épaisseur ($2h$) de la plaque et de l'ordre du développement

$$H_{mn} = \frac{2h^{m+n+1}}{m+n+1} \quad \text{lorsque } m+n \text{ est pair} \quad \text{IV-7}$$

$$H_{mn} = 0 \quad \text{lorsque } m+n \text{ est impair}$$

L'introduction de ces valeurs moyennes permet d'éliminer la variable a_2 des équations d'équilibre.

L'équation IV-4 peut s'écrire en utilisant la valeur de $\overline{\tau}_{ij}^{(n)}$ qui est la grandeur de l'effort à l'ordre n de a_2 mais qui n'est plus la valeur moyenne sur l'épaisseur.

La relation effort-déformation permet de passer des efforts d'ordre n $\overline{T}_{ij}^{(n)}$ aux déformations d'ordre n $\overline{s}_{ij}^{(n)}$:

$$\overline{T}_{ij}^{(n)} = C_{ijkl} \sum_n H_{mn} \overline{S}_{kl}^{(n)} \quad \text{IV-8}$$

Dans ce modèle de résolution théorique, la condition limite sur les faces principales reste inchangée et s'écrit :

$$\overline{T}_{2j} = 0 \quad \text{en} \quad a_2 = \pm h \quad \text{IV-9}$$

Par contre, sur les faces latérales, la condition aux limites sera remplacée également par sa valeur moyenne.

Appliquons ceci au cas de la prédéformation statique. Les équations d'équilibre s'écrivent :

à l'ordre 0

$$\overline{T}_{ij,i}^{(0)} + \overline{F}_j^{(0)} = 0 \quad \text{IV-10}$$

à l'ordre 1

$$\overline{T}_{ij,i}^{(1)} - \overline{T}_{2j}^{(0)} + \overline{F}_j^{(1)} = 0 \quad \text{IV-11}$$

avec :

$$\overline{T}_{ij}^{(0)} = \int_{-h}^h \overline{T}_{ij} da_2 \quad \text{et} \quad \overline{T}_{ij}^{(1)} = \int_{-h}^h a_2 \overline{T}_{ij} da_2$$

$$\overline{F}_j^{(0)} = \left[\overline{T}_{2j} \right]_{-h}^h \quad \text{et} \quad \overline{F}_j^{(1)} = \left[a_2 \overline{T}_{2j} \right]_{-h}^h$$

Les systèmes sont résolus à l'aide des relations (IV-5) et (IV-6) et des conditions limites, ce qui conduit à un nouveau système en a_1 et a_3 faisant intervenir les quantités $\overline{u}_i^{(n)}(a_1, a_3)$. Les constantes d'intégration sont alors déterminées par les conditions d'encastrement.

Ainsi, plaçons-nous dans le cas du modèle à deux dimensions :

Partant des déplacements ayant la forme suivante :

$$\overline{u}_i = \overline{u}_i^{(0)} + a_2 \overline{u}_i^{(1)} + a_2^2 \overline{u}_i^{(2)} + a_2^3 \overline{u}_i^{(3)} \quad (i = 1, 2) \quad \text{IV-12}$$

où les quantités $\overline{u}_i^{(n)}$ sont des fonctions de a_1 et a_3 ,

nous calculons les efforts $\overline{T}_{ij}$.

Après avoir calculé les valeurs moyennes des moments d'ordre 0 et 1, que nous reportons dans les équations d'équilibre, et introduit les conditions limites, nous obtenons un double système d'équations. Ainsi quatre relations font intervenir les fonctions $\overline{u}_1^{(0)}$, $\overline{u}_2^{(1)}$, $\overline{u}_1^{(2)}$ et $\overline{u}_2^{(3)}$. Un système de quatre autres équations relie les fonctions $\overline{u}_2^{(0)}$, $\overline{u}_1^{(1)}$, $\overline{u}_2^{(2)}$ et $\overline{u}_1^{(3)}$ entre elles. Par combinaison linéaire entre les équations et intégrations, les quantités $\overline{u}_i^{(n)}$ s'écrivent :

$$\overline{u}_1^{(0)} = -\frac{C_{22}}{C_{12}} (\beta a_1 + \gamma)$$

$$\overline{u}_2^{(1)} = \beta$$

$$\overline{u}_1^{(2)} = 0$$

$$\overline{u}_2^{(3)} = 0$$

$$\overline{u}_2^{(0)} = \frac{3B}{2} \left(a_1 + \frac{C_{22} C_{66}}{k h^2 C_{11} C_{22}} \frac{a_1^3}{3} \right) + \frac{C_{22}}{2k C_{11} C_{12}} D a_1^2 + E a_1$$

$$\overline{u}_1^{(1)} = -\frac{3B}{2} \frac{C_{22} C_{66}}{k h^2 C_{11} C_{12}} a_1^2 - \frac{C_{22}}{k C_{12} C_{11}} D a_1 + E$$

$$\overline{u}_2^{(2)} = \frac{3B}{2} \frac{C_{66}}{k h^2 C_{11}} a_1 + \frac{D}{2k C_{11}}$$

$$\overline{u}_1^{(3)} = -\frac{B}{2h^2} \left(1 + \frac{C_{66}}{k C_{11}} \right)$$

avec $k = \frac{C_{12}}{C_{11}} - \frac{C_{22}}{C_{12}}$

où C_{ij} sont les coefficients élastiques du deuxième ordre écrit en indices contractés (par exemple $C_{66} = C_{12\ 12}$).

Les grandeurs β , γ , B , D , E sont des constantes qui sont définies par le modèle de forces appliquées et par les conditions d'encastrement. Les coefficients C_{ij} sont évidemment calculés pour la coupe choisie (θ , ϕ).

Par rapport à la méthode de la fonction d'effort, où l'anisotropie du cristal est introduite par les relations effort-déformation, l'anisotropie est

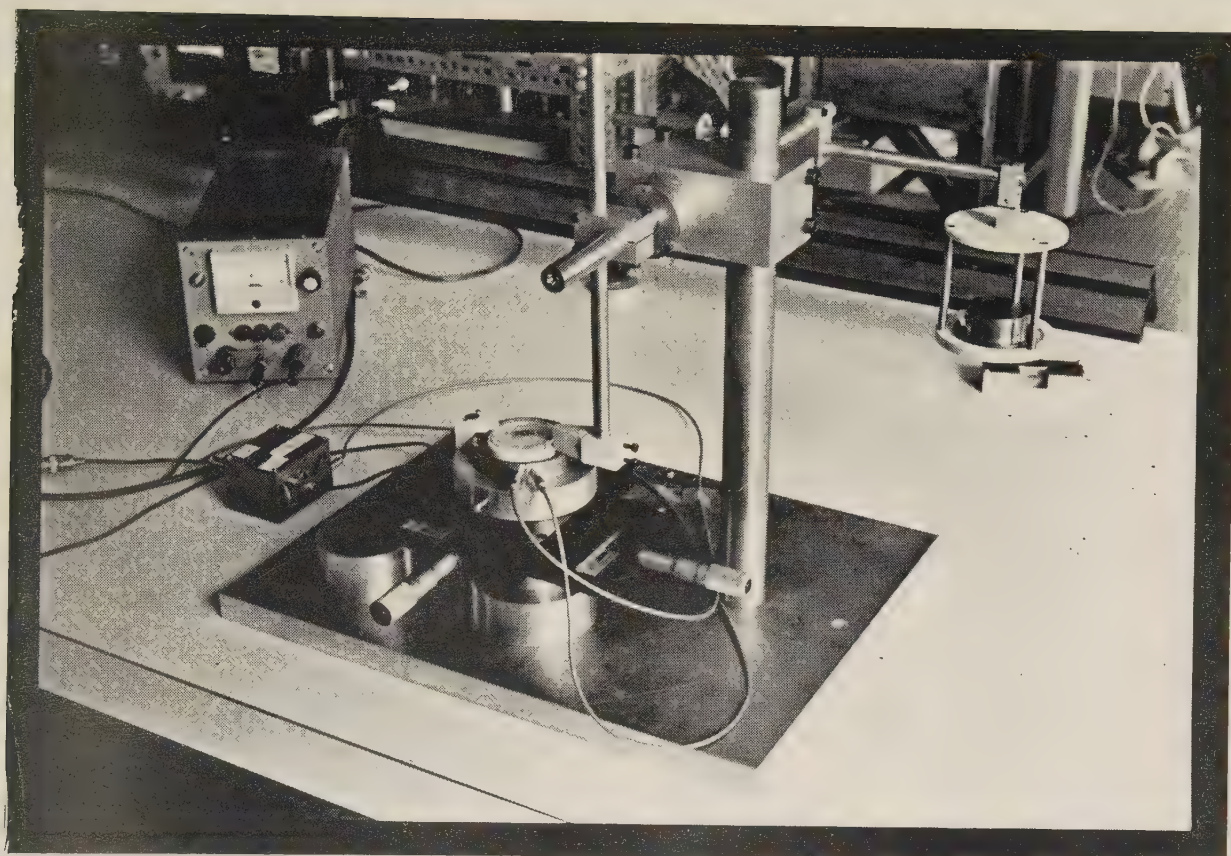


Photo 3 : Dispositif permettant d'appliquer des forces
Pour des forces de flexion, les deux bras
de la "balance" sont parallèles.

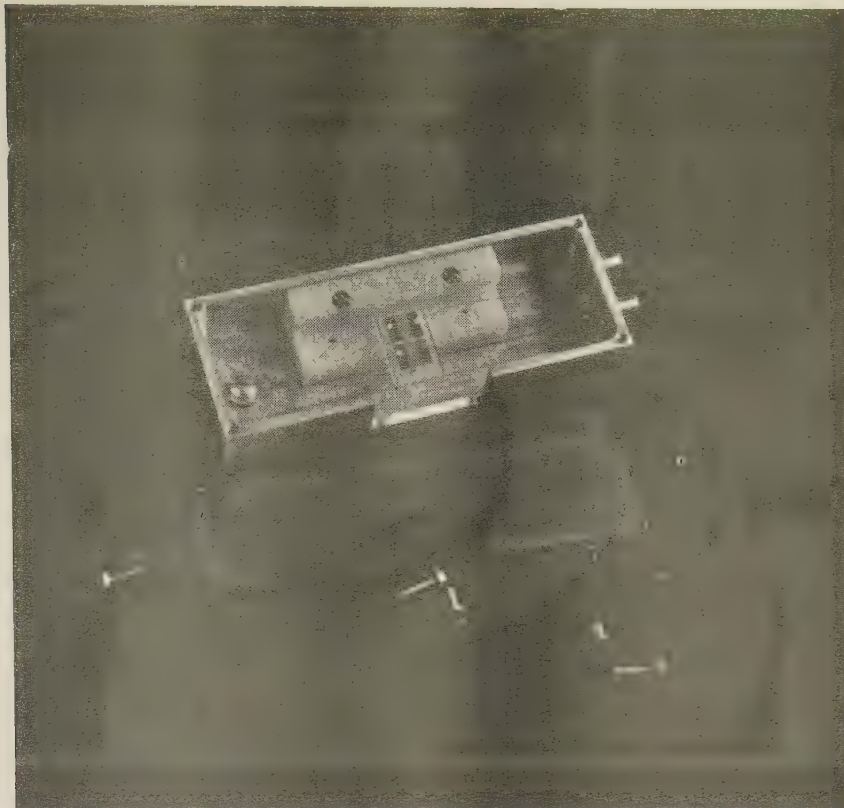


Photo 4 : Dispositif d'encastrement d'une lame rectangulaire

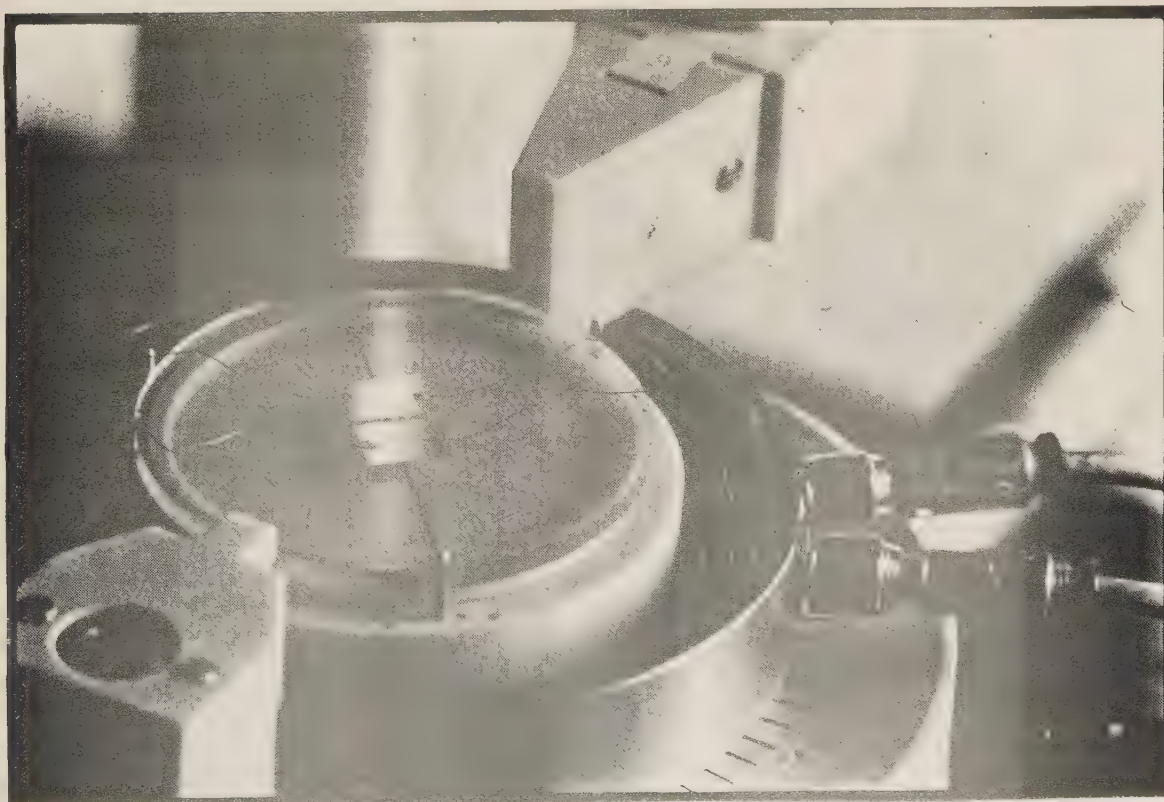


Photo 5 : Application de forces de compression sur disque de quartz

ici présente à tout instant du calcul depuis la définition des efforts comme fonction des gradients des déplacements.

Ce calcul est appliqué à l'étude de la flexion et de la compression plane sur des lames de quartz rectangulaires.

IV-2 - ETUDE EXPERIMENTALE

Dans ce paragraphe, une étude comparative des mesures et des résultats théoriques est présentée pour des plaques de quartz de coupe Y,X et ST,X.

IV-2-1 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Un dispositif permettant d'appliquer des forces de flexion et de compression a été réalisé et utilisé avec des lames rectangulaires et circulaires.

La photographie (3) représente le dispositif qui est constitué de deux éléments :

- d'une part, une "balance" à transmission mécanique directe permet d'appliquer la force sur la lame par l'intermédiaire d'un couteau positionné sur le bras, mobile autour d'un axe parallèle au socle de l'appareil.
- d'autre part, un boîtier contient la lame rectangulaire encastrée à l'une de ses extrémités (photo 4) ou circulaire (photo 5). Il peut être positionné par rapport au couteau à l'aide d'une table X,Y à vis micrométriques.

La principale difficulté de l'étude expérimentale est d'assurer une bonne reproductibilité des résultats lorsque l'on applique un grand nombre de fois la même contrainte statique sur les lames.

Mesure de la sensibilité

De la même façon que pour les études de température, nous pouvons mesurer la sensibilité en relevant les variations de fréquence de synchronisme de la ligne à onde de surface, soit par une méthode de transmission et d'asservissement de phase, soit en mesurant la fréquence d'un oscillateur "bouclé" par la ligne.

IV-2-2 - FORCES DE FLEXION

L'étude, tant expérimentale que théorique, est faite sur une lame de quartz de coupe Y ou de coupe ST, encastrée à l'une de ses extrémités (fig. 55)

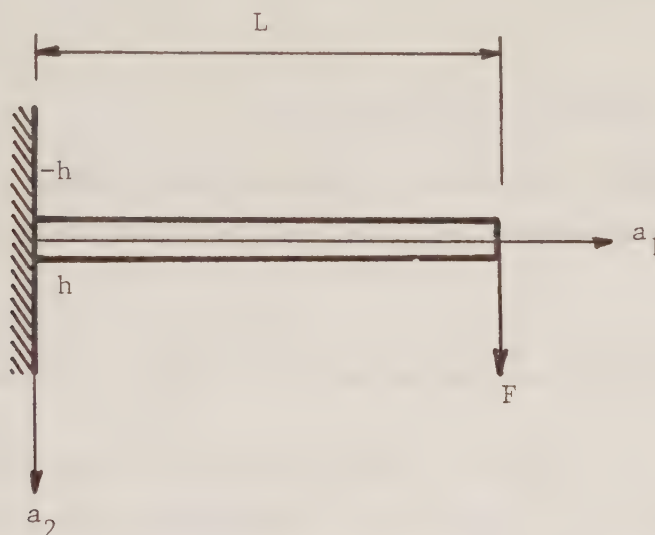


Fig. 55

Cette disposition impose les conditions aux limites suivantes :

La lame est encastrée rigidement au point $a_1 = a_2 = 0$

$$\text{soit } \overline{u_1} = \overline{u_2} = 0 \quad \text{en } a_1 = a_2 = 0 \quad \text{donc } \gamma = 0$$

Au même point, on empêche toute rotation autour de l'axe $\overrightarrow{Oa_2}$, donc

$$\overline{u_{1,2}} = 0 \quad \text{pour } a_1 = a_2 = 0 \quad \text{donc } E = 0$$

A l'extrémité, les forces normales sont nulles ainsi que leur moment :

$$\overline{T_{11}}^{(0)} = 0 \quad \text{pour } a_1 = L \quad \text{donc } \beta = 0$$

La force de flexion F appliquée à l'extrémité est répartie uniformément et est égale à la valeur moyenne de la force de flexion sur l'épaisseur :

$$\overline{T}_{12}^{(0)} = F \quad \text{pour} \quad a_2 = 0$$

ce qui conduit à la valeur de la constante B :

$$B = \frac{F}{2h C_{66}}$$

Les points $a_1 = 0$, $a_2 = \pm h$ sont fixés aussi rigidement suivant l'axe $\overline{Oa}_2$:

$$(\overline{u}_2 = 0) \quad \text{donc} \quad D = 0$$

Ainsi, dans le cas de la flexion, seules les fonctions $\overline{u}_1^{(1)}$, $\overline{u}_1^{(3)}$, $\overline{u}_2^{(0)}$ et $\overline{u}_2^{(2)}$ sont non nulles. Les déplacements s'écrivent :

$$\overline{u}_1 = a_2 \overline{u}_1^{(1)}(a_1, a_3) + a_2^3 \overline{u}_1^{(3)}(a_1, a_3)$$

IV-13

$$\overline{u}_2 = \overline{u}_2^{(0)}(a_1, a_3) + a_2^2 \overline{u}_1^{(2)}(a_1, a_3)$$

Soit, en posant $K = \frac{3F}{4h^3 C_{66}}$ et $\alpha_o = \frac{C_{12} C_{66}}{C_{12}^2 - C_{11} C_{22}}$

$$\overline{u}_1 = -K \left(\alpha_o \frac{C_{22}}{C_{12}} a_2 a_1^2 + \frac{1 + \alpha_o}{3} a_2^3 \right)$$

IV-14

$$\overline{u}_2 = +K \left(\frac{\alpha_o}{3} \frac{C_{22}}{C_{12}} a_1^2 + h^2 + \alpha_o a_2^2 \right) a_1$$

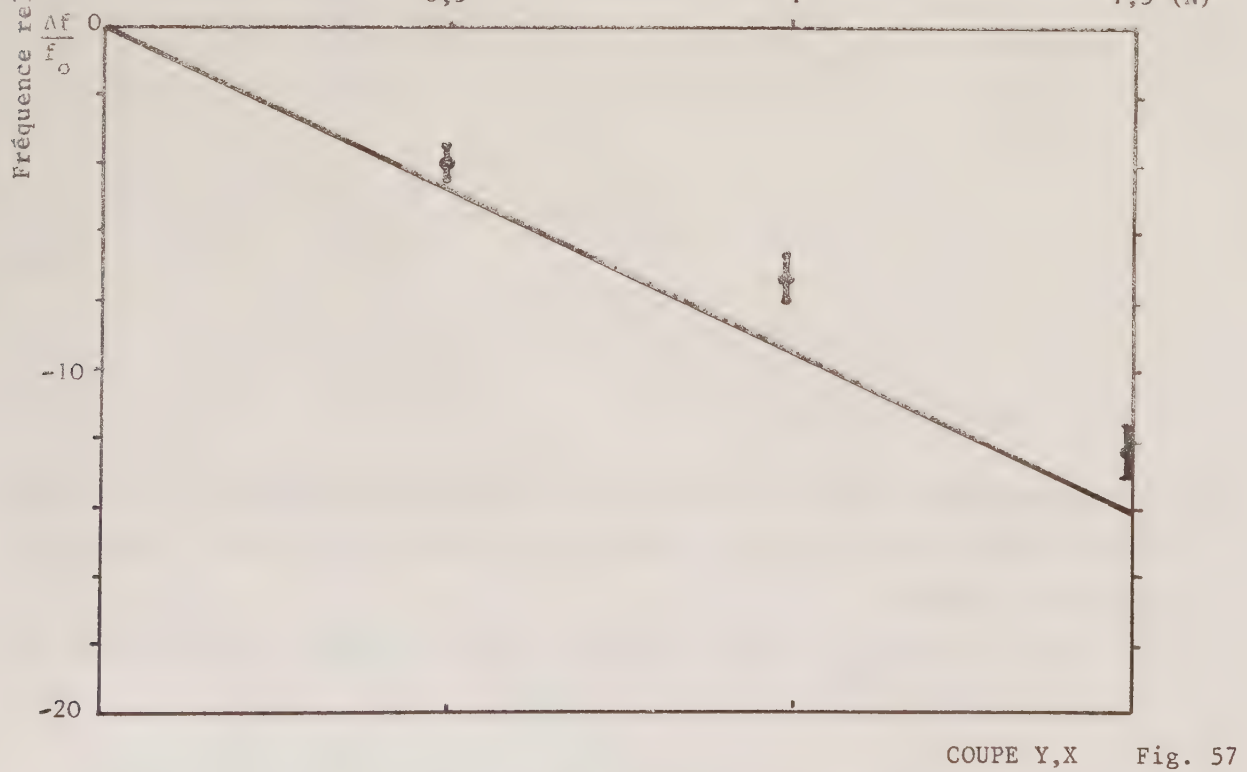
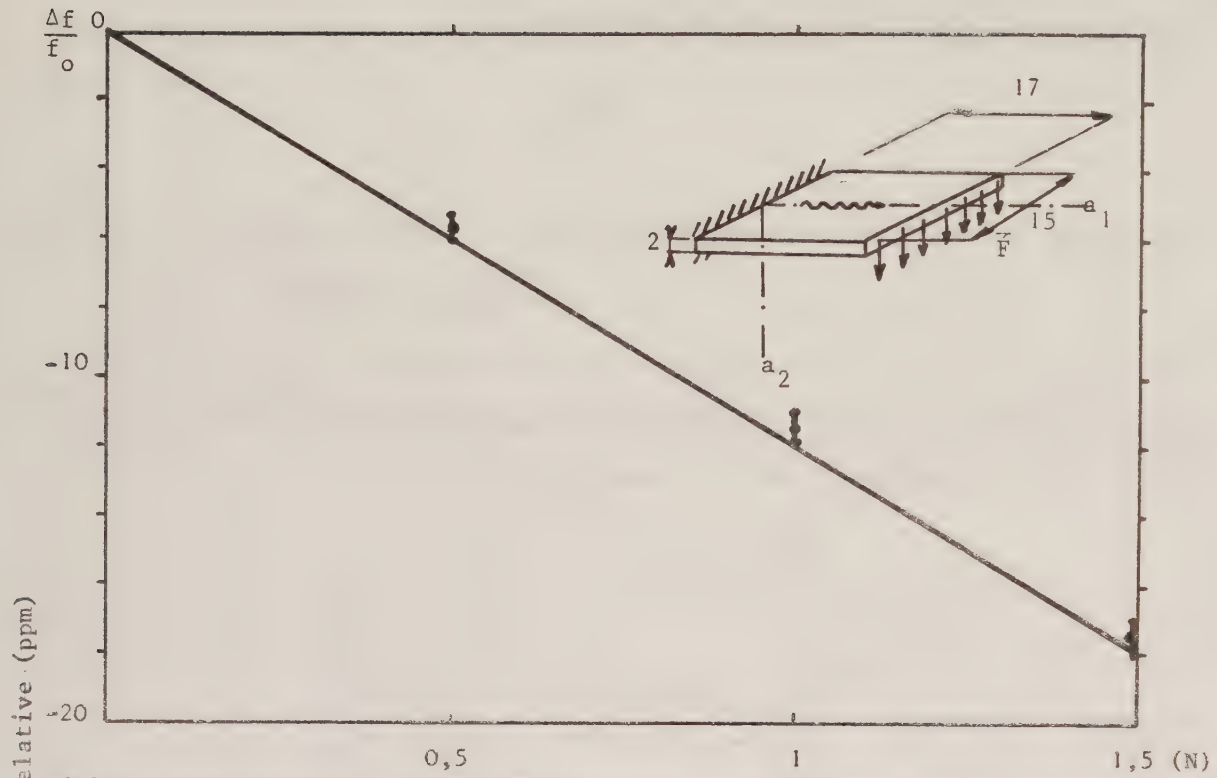
De ces expressions, sont déduits les gradients des déplacements, les déformations et les effets statiques indispensables au calcul de la variation relative de vitesse.

$$\begin{cases} \overline{u}_{1,2} = -K \left(\alpha_o \frac{C_{22}}{C_{11}} a_1^2 + (1 + \alpha_o) a_2^2 \right) \\ \overline{u}_{2,1} = +K \left(\alpha_o \frac{C_{22}}{C_{11}} a_1^2 + h^2 + \alpha_o a_2^2 \right) \end{cases}$$

IV-15

FORCE DE FLEXION

COUPE ST,X Fig. 56



COUPE Y,X Fig. 57

— courbe théorique

⊞ points expérimentaux

Déformations

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{S_{11}} = \overline{u_{1,1}} = -2 K \alpha_o \frac{C_{22}}{C_{12}} a_1 a_2 \\ \overline{S_{22}} = \overline{u_{2,2}} = +2 K \alpha_o a_1 a_2 \\ \overline{S_{12}} = \frac{1}{2} (\overline{u_{1,2}} + \overline{u_{2,1}}) = -\frac{K}{2} (a_2^2 - h^2) \end{array} \right. \quad \text{IV-16}$$

Efforts

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{T_{11}} = + \frac{3F}{2h^3} a_1 a_2 \\ \overline{T_{22}} = 0 \\ \overline{T_{12}} = - \frac{3F}{4h^3} (a_2^2 - h^2) \end{array} \right. \quad \text{IV-17}$$

Nous tiendrons compte dans nos calculs du fait que les déplacements sont à l'ordre 3 en a_2 . Le calcul de la valeur moyenne $\langle \frac{\Delta f}{f_0} \rangle$ est effectué sur la distance parcourue par l'onde (6,5 mm) dans la direction $\overrightarrow{Ox_1}$ (variable repérée par a_1).

Les figures (56) et (57) représentent les variations relatives de fréquence théoriques et expérimentales en fonction de la force de flexion appliquée dans le cas de la coupe ST,X (figure 56) et de la coupe Y,X (figure 57).

L'incertitude de mesure provient essentiellement du manque de reproductibilité dans la façon dont les forces sont appliquées d'une mesure à l'autre.

Sur le tableau VI sont comparées les sensibilités théoriques et expérimentales des coupes ST,X et Y,X.

SENSIBILITE THEORIQUE A LA FLEXION PERPENDICULAIRE A $\vec{Oa_1}$
 EN FONCTION DE L'ANGLE DE COUPE ($Y \pm \theta$)

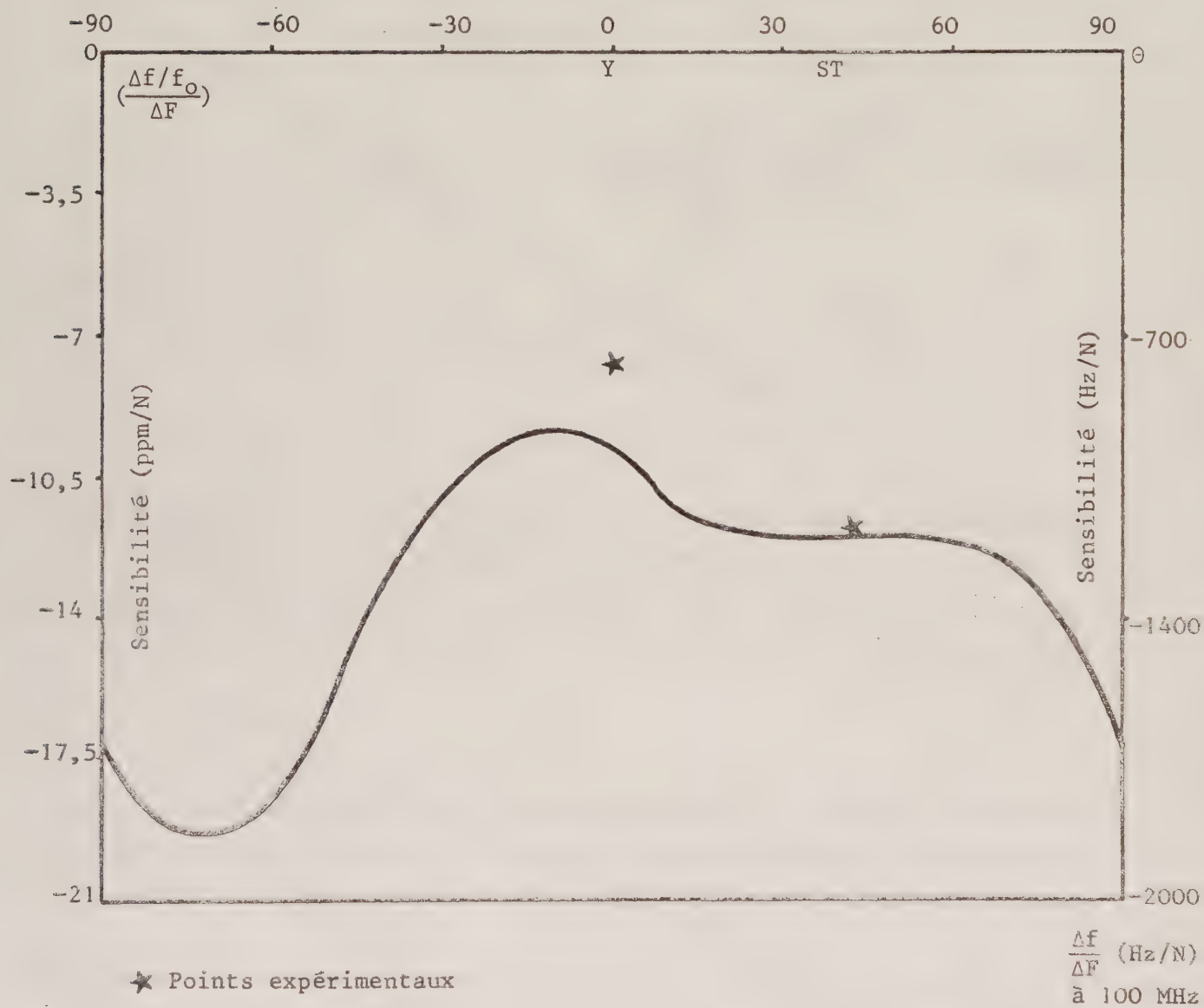


Fig. 58

sensibilité à la flexion		$(\Delta f/f_0)/\Delta F$ (ppm/N)	$\Delta f/\Delta F$ à 100 MHz (Hz/N)
ST,X	mesurée	- 11,4	- 1140
	calculée	- 12	- 1200
Y,X	mesurée	- 7,4	- 740
	calculée	- 9,3	- 930

Tableau VI

La différence de sensibilité est due à l'effet d'anisotropie du cristal (différence de $42^{\circ}30'$ entre la coupe Y et la coupe ST), les lames ayant les mêmes dimensions. (longueur 17 mm, largeur 15 mm, épaisseur 2 mm).

Une mesure complémentaire a été effectuée en encastrant la lame de coupe ST suivant un côté parallèle à la direction de propagation ($\overrightarrow{Oa_1}$), la force agissant sur le côté opposé : la sensibilité est alors de -0,7 ppm/N.

Ces résultats montrent la grande sensibilité aux forces de flexion lorsqu'elles agissent perpendiculairement à la direction de propagation. D'autre part, les sensibilités différentes des coupes Y et ST montrent la nécessité qu'il y a à rechercher les coupes les plus sensibles pour réaliser un capteur de forces.

La figure (58) représente la sensibilité théorique à la flexion pour des lames de quartz de coupe à simple rotation $Y \pm \theta$. La sensibilité est minimale pour la coupe $(Y-10^{\circ})$ et elle est maximale pour la valeur $\theta = -73^{\circ}$. Cependant, cette dernière coupe a un facteur de couplage électromécanique très faible. L'étude des coupes à double rotation permettra certainement de mettre en évidence une coupe plus sensible aux forces et suffisamment piézoélectrique pour être utilisée.

IV-2-3 - FORCES DE COMPRESSION

L'étude théorique d'une lame soumise à des forces de compression sur deux de ses faces latérales, conduit aux expressions homogènes suivantes des déplacements, des déformations et des efforts statiques :

Déplacements

$$\begin{aligned}\overline{u_1} &= K_1 a_1 \\ \overline{u_2} &= K_2 a_2\end{aligned}\quad \text{IV-18}$$

$$\begin{aligned}\text{avec } K_1 &= (F/2h) (C_{22}/\{C_{12}^2 - C_{11} C_{22}\}) \\ K_2 &= -(F/2h) (C_{12}/\{C_{12}^2 - C_{11} C_{22}\})\end{aligned}$$

Déformations

$$\begin{aligned}\overline{s_{11}} &= K_1 \\ \overline{s_{22}} &= K_2 \\ \overline{s_{12}} &= 0\end{aligned}\quad \text{IV-19}$$

Efforts

$$\begin{aligned}\overline{T_{11}} &= -F/2h \\ \overline{T_{22}} &= 0 \\ \overline{T_{12}} &= 0\end{aligned}\quad \text{IV-20}$$

Les figures (59) et (60) représentent les variations relatives de fréquences des coupes ST,X (fig. 59) et Y,X (fig. 60). L'application de la précontrainte se traduit dans ce cas par une augmentation de fréquence. Ce qui se comprend aisément puisqu'une compression augmente la rigidité du milieu et donc la vitesse de l'onde.

Le tableau VII donne les sensibilités expérimentale et théorique pour une force de compression appliquée parallèlement à la direction de propagation. (les dimensions des lignes sont identiques à celles utilisées pour l'étude de la sensibilité à la flexion).

Fig. 59 : COUPE ST,X

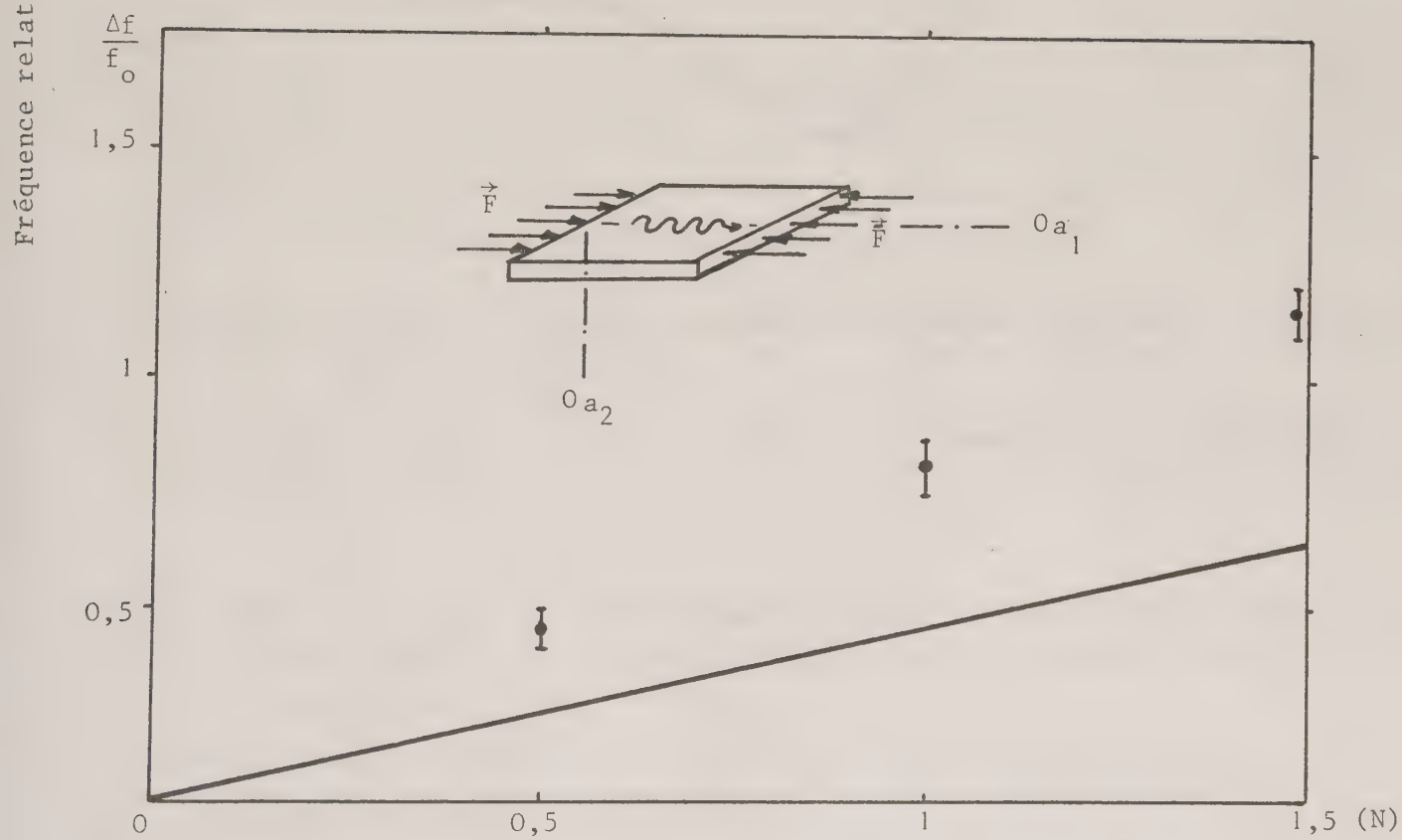
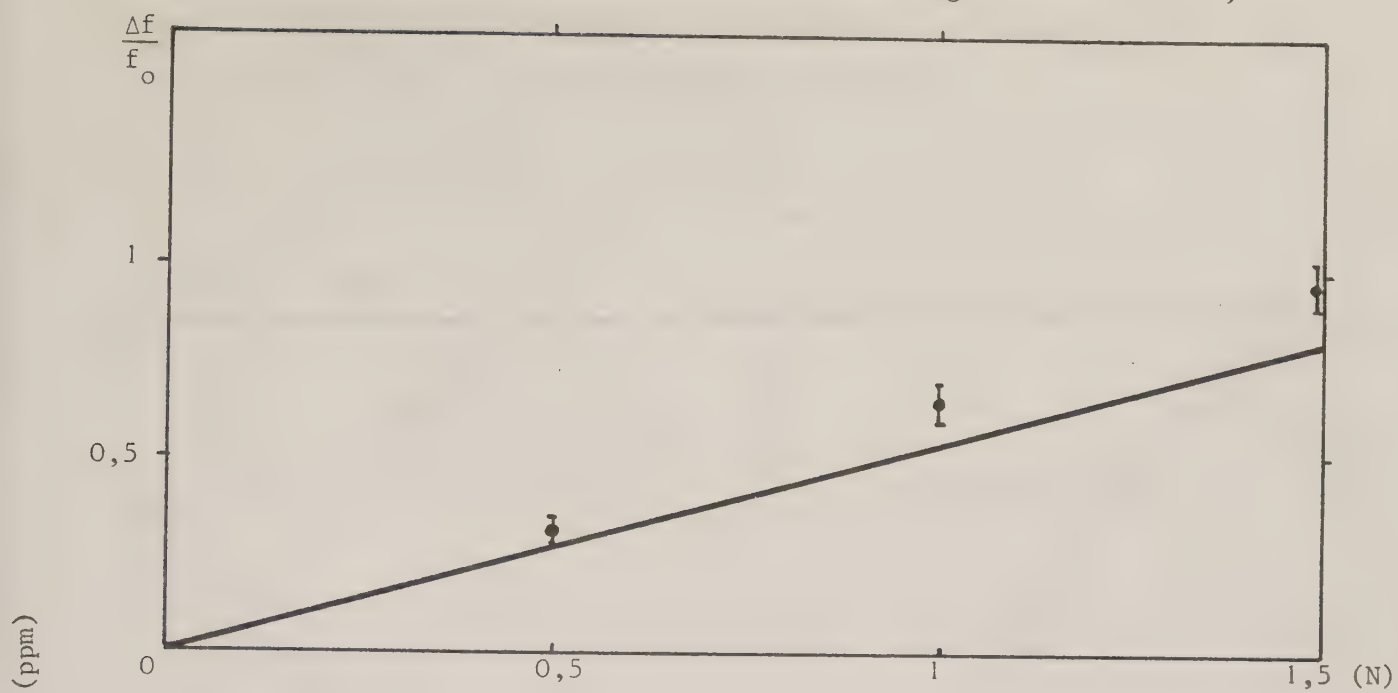


Fig. 60 : COUPE Y,X

— valeurs théoriques

• points expérimentaux

SENSIBILITE THEORIQUE A LA COMPRESSION SUIVANT $\overrightarrow{Oa_1}$
 EN FONCTION DE L'ANGLE DE COUPE ($\gamma \pm \theta$)

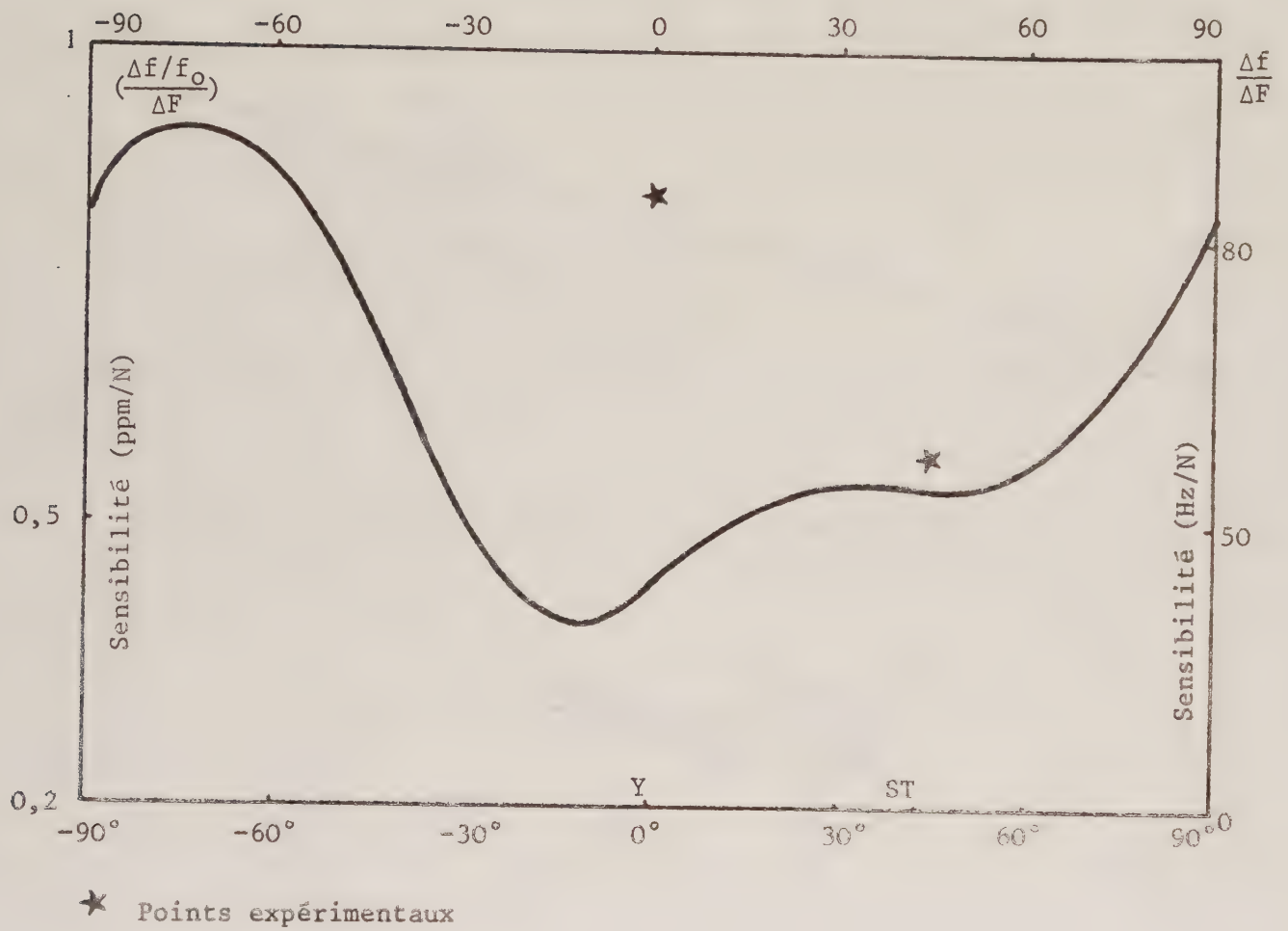


Fig. 61

sensibilité à la compression		$(\Delta f/f_0)/\Delta F$ (ppm/N)	$\Delta f/\Delta F$ à 100 MHz (Hz/N)
ST,X	mesurée	0,58	58
	calculée	0,54	54
Y,X	mesurée	0,9	90
	calculée	0,45	45

Tableau VII

Remarque : Les valeurs obtenues pour des forces de compression uniaxiales appliquées perpendiculairement à la direction de propagation (suivant $\vec{Oa_3}$) sont très faibles. Leur valeur reste de l'ordre de grandeur de la précision de la mesure et est donc sans signification réelle.

Sur la figure (61), nous avons représenté la variation de la sensibilité à la compression uniaxiale en fonction de l'angle de coupe θ pour des coupes de quartz $Y \pm \theta$.

Comme dans le cas de l'application des forces de flexion, la coupe ($Y-10^\circ$) la moins sensible et la coupe la plus sensible est obtenue pour la valeur de θ égale à -73° .

L'étude des coupes à simple rotation ($Y \pm \theta$) ne fait pas apparaître de coupe insensible à l'action des forces extérieures. Seule la coupe ($Y-10^\circ$) permet de minimiser ces effets.

En contrepartie, nous avons mis en évidence une coupe à simple rotation beaucoup plus sensible à ces phénomènes : la coupe (Y-73°). Cette étude, étendue aux coupes à double rotation, permettra de faire apparaître d'autres coupes particulièrement sensibles. Mais, d'ores et déjà, on peut envisager l'utilisation de lignes à retard à onde de surface comme jauges de contraintes pour la mesure de forces comprises entre quelques dixièmes et quelques dizaines de Newton en mesure directe.

IV-2-4 - COMPRESSION RADIALE D'UNE PLAQUE CIRCULAIRE

Ce problème abordé par de nombreux auteurs dans le cas des ondes de volume (14), (15) n'a été que peu étudié en ondes de surface (29). Notre étude faite dans le cas de la coupe Y,X peut être étendue sans difficulté à d'autres coupes.

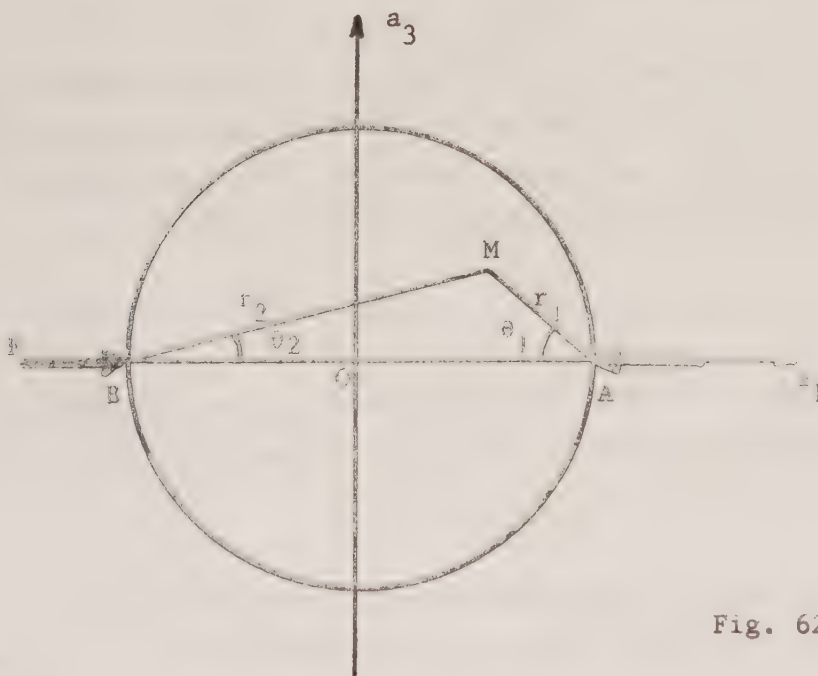


Fig. 62

La force F est supposée uniformément répartie sur l'épaisseur $2h$ de la plaque (2mm), de rayon R égal à 20 mm . Ceci correspond au cas d'une distribution radiale simple bien connue. (Fig, 62)

On démontre que la répartition plane des efforts a la forme suivante :

$$\begin{aligned}\overline{T}_{11} &= \frac{F}{\pi h} \left(\cos^2 \theta_1 \frac{\cos \theta_1}{r_1} + \cos^2 \theta_2 \frac{\cos \theta_2}{r_2} - \frac{1}{2R} \right) \\ \overline{T}_{33} &= \frac{F}{\pi h} \left(\sin^2 \theta_1 \frac{\cos \theta_1}{r_1} + \sin^2 \theta_2 \frac{\cos \theta_2}{r_2} - \frac{1}{2R} \right) \\ \overline{T}_{13} &= \frac{F}{\pi h} \left(\sin \theta_1 \cos \theta_1 \frac{\cos \theta_1}{r_1} - \sin \theta_2 \cos \theta_2 \frac{\cos \theta_2}{r_2} \right)\end{aligned}\quad \text{IV-21}$$

et en particulier sur l'axe Oa_1 correspondant à la direction de propagation, ces relations prennent la forme :

$$\begin{aligned}\overline{T}_{11} &= \frac{F}{\pi h} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{2R-r_1} - \frac{1}{2R} \right) \\ \overline{T}_{33} &= - \frac{F}{2 \pi h R} \\ \overline{T}_{13} &= 0\end{aligned}\quad \text{IV-22}$$

Afin de faire intervenir l'azimuth de la force F , nous supposons qu'elle s'applique suivant une direction $\overrightarrow{Oa'_1}$ présentant un angle α avec la direction de propagation $\overrightarrow{Oa_1}$ (fig. 63)

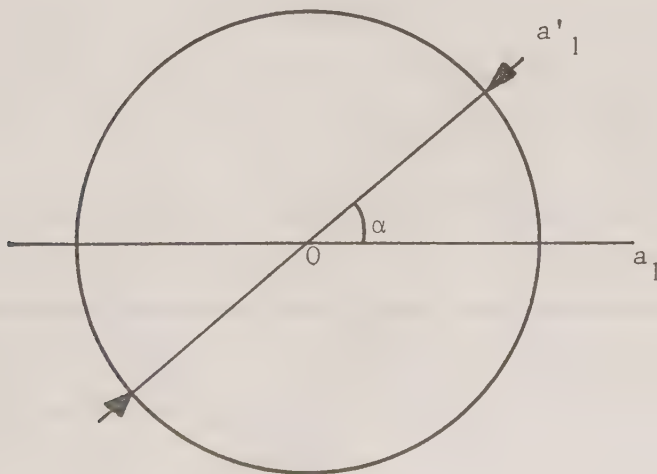


Fig. 63

COMPRESSION RADIALE EN FONCTION DE L'ANGLE D'APPLICATION
PAR RAPPORT A LA DIRECTION DE PROPAGATION

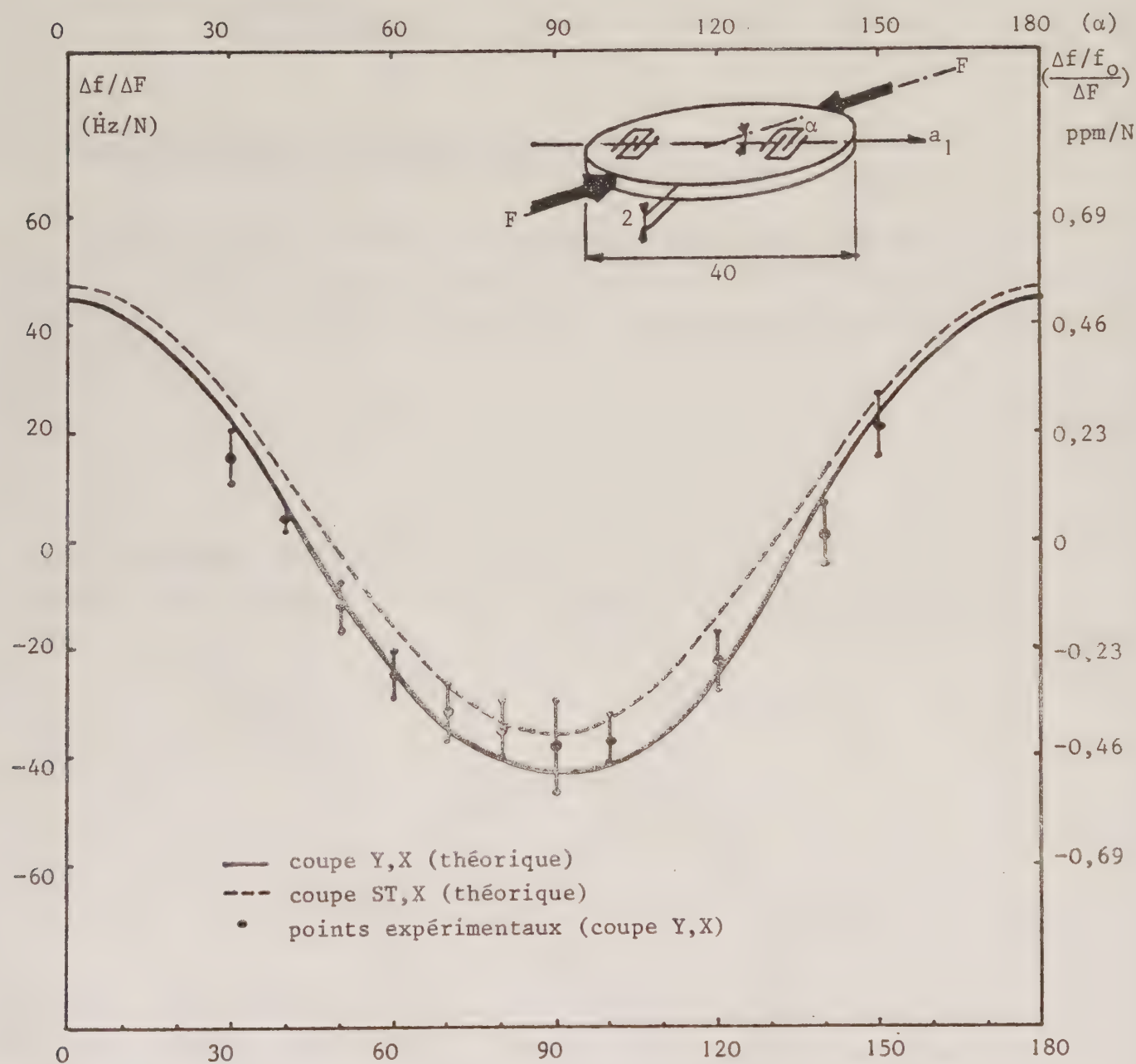


Fig. 64

Les efforts s'expriment alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\overline{T}_{11}' &= \overline{T}_{11} \cos^2\alpha + \overline{T}_{33} \sin^2\alpha + 2 \sin\alpha \cos\alpha \overline{T}_{13} \\ \overline{T}_{33}' &= \overline{T}_{11} \sin^2\alpha + \overline{T}_{33} \cos^2\alpha - 2 \sin\alpha \cos\alpha \overline{T}_{13} \\ \overline{T}_{13}' &= (\overline{T}_{33} - \overline{T}_{11}) \sin\alpha \cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \overline{T}_{13}\end{aligned}\quad \text{IV-23}$$

La relation effort-déformation permet d'écrire les expressions des déformations en introduisant l'anisotropie du cristal.

$$\overline{S}_{ij} = s_{ijkl} \overline{T}_{kl}$$

où s_{ijkl} sont les coefficients élastiques de souplesse du milieu.

La figure (64) représente d'une part les variations théoriques $\frac{\Delta f}{f}$ pour une plaque circulaire de quartz de coupes ST,X et Y,X en fonction de l'azimut α et d'autre part les valeurs expérimentales mesurées sur la coupe Y.

Les sensibilités sont maximales pour une direction d'application des forces correspondant à la direction de propagation de l'onde ($\alpha = 0^\circ = 180^\circ$) et égale à $\frac{1}{\Delta F} \left(\frac{\Delta f}{f} \right) = 0,5 \text{ ppm/N}$ donc 50 Hz/N à une fréquence de 100 MHz.

La direction $\alpha = 45^\circ$ (et $\alpha = 135^\circ$) constitue ici un plan d'influence nulle particulièrement intéressant pour "désensibiliser" un dispositif.

Toutes les mesures effectuées sont faites avec une incertitude relative qui est de l'ordre de 10 à 20 %. Ceci est dû essentiellement à la conception du montage qui se veut aussi universel que possible pour ces expériences.

La conception de jauges de contraintes utilisant des lignes à retard (ou des résonateurs) devra s'affranchir de ces inconvénients. En particulier, le montage de la ligne devra se faire rigidement et en contrôlant au mieux les précontraintes parasites. Les forces seront alors appliquées au moyen de pistons prépositionnés contre la ligne et ceci d'une façon fixe.

La bonne sensibilité à la flexion permettra de faire des jauges de contraintes de grande résolution pour des forces de valeurs faibles. Pour cela, la lame pourra être encastrée, soit à une extrémité comme dans notre étude,

soit à ses deux extrémités, la force étant alors appliquée au centre du dispositif sur la face ne portant pas les transducteurs interdigités.

Pour des mesures de forces plus importantes, la compression nous semble mieux adaptée.

En fait, le choix entre la flexion et la compression est aussi déterminé par la bande passante désirée pour le capteur. En effet, cette dernière est limitée par la fréquence de résonance du dispositif et à cet égard, les modes de flexion présentent des fréquences propres plus basses que les modes de compression.

Cette étude sera poursuivie dans le but d'améliorer les sensibilités en utilisant des coupes plus appropriées et aussi en optimisant les paramètres géométriques de la ligne et des transducteurs.

IV-2-5 - SENSIBILITE AUX ACCELERATIONS

Dans certaines applications, et par exemple de type aérospatial, le dispositif est soumis à des accélérations (constantes ou lentement variables donc très difficiles à filtrer) ou à des vibrations.

Les études menées sur ce type de perturbations, dans le cas des oscillateurs à ondes de volume (31), (32), (33) ont montré que pour ces derniers, les sensibilités étaient de l'ordre de $10^{-9}/G$ mais qu'elles pouvaient être réduites par une construction parfaitement symétrique du résonateur (41).

Les premières mesures effectuées à l'ONERA* ont montré que les ondes de surface présentent une sensibilité beaucoup plus grande et de l'ordre de $10^{-7}/G$. Il s'avère donc nécessaire d'entreprendre une analyse de ce phénomène afin de le comprendre et par conséquent d'être à même de le diminuer. Cette étude a été engagée en collaboration avec l'ONERA.

* Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales

Un champ d'accélération crée des forces de volume qui sont équilibrées par les forces de réaction des supports de la ligne, le système total de forces plaçant encore le cristal sous précontrainte. En général, du fait du mode de fixation, les contraintes ainsi créées sont inhomogènes.

Pour une première approche de ce phénomène, nous avons établi les expressions des efforts, déformations et déplacements au moyen de la méthode analytique précédemment présentée pour une lame de quartz de coupe quelconque soumise à une accélération Γ perpendiculaire à ses faces principales.

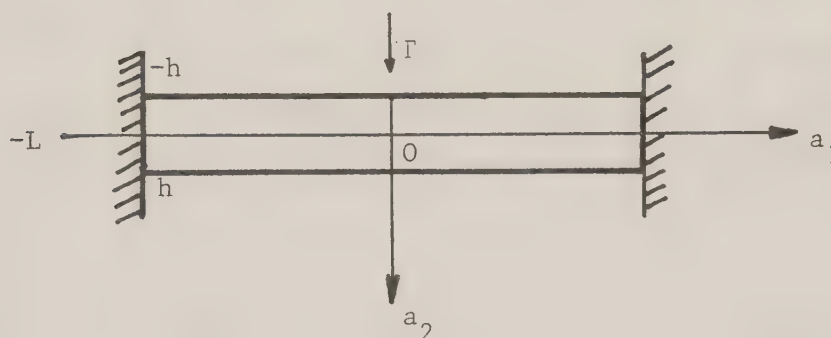


Fig. 65

Comme le montre la figure (65), la lame d'épaisseur $2h = 2 \text{ mm}$ est encastée rigidement à ses deux extrémités (en $a_1 = \pm L$) et est supposée de dimension infinie suivant l'axe $\overrightarrow{Oa_3}$. ($2L = 40 \text{ mm}$).

On se ramène donc à un modèle à deux dimensions. Compte tenu des conditions limites imposées par le mode de fixation, les expressions des déplacements et des déformations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{u}_1 &= \frac{Fa_1a_2}{2} \left(\frac{C_{22}a_1^2}{h^2C_{12}^2} - \left(\frac{C_{22}L^2}{h^2C_{12}^2} + \frac{3}{C_{66}} \right) + \frac{a_2^2}{h^2} \left(\frac{1}{C_{66}} + \frac{C_{12}}{C_{12}^2} \right) \right) \\ \overline{u}_2 &= -\frac{C_{22}F}{8h^2C_{12}^2} (a_1^2 - L^2) + a_2^2 \left[\frac{FC_{12}}{4C_{22}} \left(\frac{C_{22}L^2}{h^2C_{12}^2} + \frac{3}{C_{66}} \right) + \frac{F}{4C_{22}} - \frac{3C_{12}F}{4h^2C_{12}^2} a_1^2 \right] \\ &\quad - \frac{a_2^4 F}{8h^2C_{22}} \left(1 + \frac{C_{12}}{C_{66}} + \frac{C_{12}^2}{C_{12}^2} \right) \end{aligned} \quad \text{IV-24}$$

$$\overline{S}_{11} = \frac{Fa_2}{2} \left[\frac{3 C_{22}}{h^2 C_{12}^2} a_1^2 - \left(\frac{C_{22} L^2}{h^2 C_{12}^2} + \frac{3}{C_{66}} \right) + \frac{a_2^2}{h^2} \left(\frac{1}{C_{66}} + \frac{C_{12}}{C_{12}^2} \right) \right]$$

$$\overline{S}_{22} = \frac{Fa_2}{2} \left[- \frac{3 C_{12} a_1^2}{h^2 C_{12}^2} + \frac{1}{C_{22}} + \frac{C_{12}}{C_{22}} \left(\frac{C_{22} L^2}{h^2 C_{12}^2} + \frac{3}{C_{66}} \right) - \frac{a_2^2}{C_{22} h^2} \left(1 + \frac{C_{12}}{C_{66}} + \frac{C_{12}^2}{C_{12}^2} \right) \right]$$

IV-25

$$\overline{S}_{12} = \frac{Fa_1}{2} \left[\frac{3a_2^2}{h^2} \left(\frac{1}{C_{66}} + \frac{C_{12}}{C_{12}^2} \right) - \frac{3 C_{12} a_2^2}{h^2 C_{12}^2} - \frac{3}{C_{66}} \right]$$

avec $F = \rho \Gamma$ (ρ : masse volumique)

et $\overline{C}_{12}^2 = C_{12}^2 - C_{11} C_{22}$

Comme précédemment en appliquant la méthode de perturbation, les variations relatives de fréquence sont calculées :

$$\left\langle \frac{\Delta f}{f} \right\rangle = 5,9 \cdot 10^{-8} / G \quad \text{à la fréquence de 100 MHz}$$

Des mesures effectuées à l'ONERA sur un dispositif expérimental ayant des caractéristiques semblables, donnent une sensibilité de l'ordre de $7 \cdot 10^{-8} / G$ également à la fréquence de 100 MHz.

Constatons l'accord relativement bon entre nos prévisions théoriques et les mesures effectuées.

Il est maintenant nécessaire, tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental, d'optimiser d'une part la fixation des lames qui a une grande influence sur la sensibilité, et d'autre part de rechercher des coupes intrinsèquement moins sensibles.

De façon générale, on peut constater que la coupe ST,X, actuellement utilisée dans les dispositifs à onde de surface, est beaucoup plus sensible aux perturbations mécaniques que la coupe AT correspondante des résonateurs à onde de volume.

Le tableau VIII présente un résumé comparatif des différentes sensibilités obtenues avec des lignes de coupe ST,X.

	sensibilités expérimentales $\frac{1}{\Delta F} (\Delta f/f_o)$	sensibilités théoriques $\frac{1}{\Delta F} (\Delta f/f_o)$	dimensions des lignes (mm)
Force de flexion	$-11,4 \cdot 10^{-6} / N$	$-12 \cdot 10^{-6} / N$	$17 \times 15 \times 2$
Force de compression	$-5,8 \cdot 10^{-7} / N$	$-5,4 \cdot 10^{-7} / N$	$17 \times 15 \times 2$
Accélération	$7 \cdot 10^{-8} / G$	$5,9 \cdot 10^{-8} / G$	$40 \times 10 \times 2$
Pression hydrostatique *	$3 \cdot 10^{-6} / \text{Bar}$	$3,6 \cdot 10^{-6} / \text{Bar}$	$15 \times 15 \times 2$

* Une étude de ces effets est actuellement en cours au Laboratoire ; elle est menée en collaboration avec le laboratoire central de recherche de la Thomson-CSF dans le but de réaliser des capteurs de pression.

Tableau VIII

Signalons également que toutes les mesures réalisées dans le cadre de ce travail ont été effectuées sur des oscillateurs utilisant des lignes à retard. L'étude est suffisamment générale pour s'appliquer également au cas des résonateurs (39). Il serait cependant intéressant de comparer les résultats par des mesures effectuées sur ces derniers.

CONCLUSION

-oOo-

Dans ce travail, nous nous sommes efforcés de donner la description la plus générale possible des effets non linéaires des ondes de surface afin de bâtir une théorie qui soit utilisable quelle que soit la perturbation qui agit sur le dispositif, à condition que les forces et déformations qui en résultent puissent être considérées comme étant statiques ou quasistatiques. Nous avons montré que, dans le cas de perturbations thermiques correspondant à une distribution uniforme de la température, la résolution pouvait être simplifiée et une méthode variationnelle appliquée directement.

Dans le cas plus général d'une prédéformation inhomogène, la méthode de perturbation qui a été développée est la plus appropriée et elle permet même de tenir compte de la pénétration de l'onde dans le substrat et des effets de couplage en volume qui en résultent. Les méthodes analytiques qui avaient pu être présentées à ce jour restaient localisées à la surface. Le modèle ainsi construit a été appliqué à plusieurs cas qui correspondent à des phénomènes cruciaux pour la réalisation d'oscillateurs à ondes de surface et leur utilisation dans des conditions difficiles d'environnement. Ainsi, nous avons étudié le problème de la sensibilité à la température en régime statique, ainsi que celui de la sensibilité aux forces et aux accélérations. La réalisation de dispositifs expérimentaux qui a été menée parallèlement, nous a permis de confronter nos prévisions théoriques avec la réalité et en général avec succès.

Tout au long de cette étude, l'objectif principal a été de mieux maîtriser les paramètres non linéaires principaux d'une onde de Rayleigh afin d'être à même de réaliser des dispositifs moins sensibles aux perturbations. Cepen-

dant, la démarche opposée, qui est en fait complémentaire de la précédente, est toujours possible et conduit à un "sous-produit" intéressant de l'étude qui est la mise au point de capteurs pour les grandeurs thermiques ou mécaniques.

Parmi les applications les plus proches d'un développement, il convient de citer les coupes à double rotation faiblement sensibles à la température d'une part, les sondes de température d'autre part.

La démonstration de la validité des outils mathématiques ayant été faite à travers quelques exemples - sensibilité aux forces de flexion, de compression, accélérations normales - une étude systématique peut maintenant être envisagée dans plusieurs directions : coupes peu sensibles aux accélérations, capteurs de pressions, de forces, accéléromètres, dispositifs à faibles pertes. En complément aux études thermiques, citons le projet que nous avons d'analyser les effets de température en régime dynamique afin de réaliser des dispositifs peu sensibles aux gradients et donc présentant des temps de réponse plus faibles ; l'application directe qui en résulterait est la réalisation d'oscillateurs à mise en chauffage rapide pour équipements aéropatiaux.

On peut espérer que la gamme de fréquences d'utilisation des ondes de surface sera étendue dans un proche avenir à 3 GHz. D'autre part, leur structure plane se prête à une intégration relativement poussée et, de ce point de vue, il serait intéressant d'utiliser des substrats de silicium ou d'arséniure de gallium qui permettraient d'associer sur la même plaque, le dispositif acoustique et l'électronique d'entretien. Enfin, pour une même puissance d'excitation, la densité d'énergie élastique d'une ligne ou d'un résonateur à onde de surface est beaucoup plus faible que celle d'une onde de volume ; les effets d'anisochronisme et d'intermodulation seront donc moins accentués et par conséquent la puissance disponible peut être plus élevée. Ainsi, des puretés spectrales de l'ordre de -180 dB à 100 MHz sont espérées et offrent de nouvelles possibilités dans le domaine des sources hyperfréquences pour les applications radars ainsi que pour les télécommunications.

Les possibilités effectives ou potentielles des ondes de surface sont donc assez bien connues ; il convient de poursuivre les études sur les phénomènes non linéaires qui conditionnent en fait tous les effets indésirables, sources d'instabilités. Seule leur maîtrise permettra d'améliorer les caractéristiques des dispositifs, qu'il s'agisse d'oscillateurs stables ou de capteurs.

ANNEXE 1

VALEURS NUMERIQUES DES PARAMETRES DU QUARTZ (42) (43)

-o0o-

1°) Masse volumique :

$$\rho = 2,65 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

2°) Coefficients de dilatation thermique :

$$\text{du 1er ordre : } \alpha_{11}^{(1)} = 13,71 \cdot 10^{-6} / (^\circ\text{C}) \quad \alpha_{33}^{(1)} = 7,48 \cdot 10^{-6} / (^\circ\text{C})$$

$$\text{du 2e ordre : } \alpha_{11}^{(2)} = 6,5 \cdot 10^{-9} / (^\circ\text{C})^2 \quad \alpha_{33}^{(2)} = 2,9 \cdot 10^{-9} / (^\circ\text{C})^2$$

$$\text{du 3e ordre : } \alpha_{11}^{(3)} = -1,9 \cdot 10^{-12} / (^\circ\text{C})^3 \quad \alpha_{33}^{(3)} = -1,5 \cdot 10^{-12} / (^\circ\text{C})^3$$

3°) Coefficients élastiques de raideur du 2e ordre :

$$\left(\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14} & C_{66} = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \end{array} \right)$$

$$C_{11} = 8,674 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{12} = 0,699 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{13} = 1,191 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{14} = -1,791 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{33} = 10,72 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{44} = 5,794 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{66} = 3,988 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Coefficients de température à 25°C :

ij	$\alpha_{C_{ij}}^{(1)} \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	$\alpha_{C_{ij}}^{(2)} \times 10^{-9} / (^\circ\text{C})^2$	$\alpha_{C_{ij}}^{(3)} \times 10^{-12} / (^\circ\text{C})^3$
11	-48,5	- 107	- 70
12	-3000	-3050	-1260
13	- 550	-1150	- 750
14	101	- 48	- 590
33	- 160	- 275	- 250
44	- 177	- 216	- 216
66	178	118	21

4°) Coefficients piézoélectriques :

- coefficients directs :

$$\begin{pmatrix} e_{11} & -e_{11} & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{14} & -e_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{11} = 0,171 \text{ C/m}^2$$

$$e_{14} = -0,0406 \text{ C/m}^2$$

5°) Permittivité

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \epsilon_{11}^S = 39,2 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \\ \epsilon_{11}^T = 39,97 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \epsilon_{33}^S = 41,0 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \\ \epsilon_{33}^T = 41,03 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \end{matrix}$$

ANNEXE 2

CALCUL DE PERTURBATION APPLIQUE AUX ONDES DE RAYLEIGH

-o0o-

Dans la relation (II-63) exprimant la variation relative de vitesse, calculons les intégrales I_1 et I_2 pour les ondes de surface.

Les composantes de l'onde non perturbée s'expriment par :

$$u_i^{\circ} = \sum_p A_p \circ u_i^{\circ}(p) e^{i\omega_o(t - \frac{n_l^{(p)} a_l}{V_o})}$$

dont le complexe conjugué est :

$$u_i^{\circ*} = \sum_p A_p^* \circ u_i^{\circ}(p)^* e^{-i\omega_o(t - \frac{n_l^{(p)*} a_l}{V_o})}$$

$$I_1 = \iiint_v u_i^{\circ} u_i^{\circ*} dv = \iiint_v \left(\sum_p A_p \circ u_i^{\circ}(p) e^{i\omega_o(t - \frac{n_l^{(p)} a_l}{V_o})} \right) \left(\sum_q A_q^* \circ u_i^{\circ}(q)^* e^{i\omega_o(t - \frac{n_l^{(q)*} a_l}{V_o})} \right) dv$$

En remarquant que :

$$\begin{array}{ll} n_1^{(r)} = 1 & n_1^{(q)*} = 1 \\ n_2^{(r)} = q_p & n_2^{(q)*} = q_q^* \\ n_3^{(r)} = 0 & n_3^{(q)*} = 0 \end{array}$$

l'intégrale I_1 devient :

$$I_1 = \iiint_v \sum_{p,q} A_p \circ u_i^{\circ}(p) A_q^* \circ u_i^{\circ}(q)^* e^{-i \frac{\omega_o}{V_o} (q_p - q_q^*) a_2} dv$$

Le calcul est fait dans toute l'épaisseur du matériau, étendue suivant x_2 jusqu'à l'infini (l'épaisseur étant très grande devant la profondeur de pénétration).

$$I_1 = -i\lambda^2 \frac{V_0}{\omega_0} \sum_{p,q} \frac{A_p \circ u_i^{\circ}(p) A_q^* \circ u_i^{\circ}(q)^*}{q_p - q_q^*}$$

Pour le calcul de l'intégrale I_2 , nous utilisons la même méthode en calculant préalablement les gradients des déplacements $\frac{\partial u_j}{\partial a_m}$ et $\frac{\partial u_i^*}{\partial a_k}$ à partir de l'expression des composantes de l'onde.

Il faut considérer deux cas suivant que les termes de couplage non linéaire dépendent ou non de x_2

$\mathcal{H}_{ikjm}$ indépendant de la variable d'espace a_2

$$I_2 = \iiint_V \left(\frac{\omega_0}{V_0}\right)^2 \overline{\mathcal{H}_{ikjm}} \sum_{p,q} A_p \circ u_j^{\circ}(p) A_q^* \circ u_i^{\circ}(q)^* n_m^{(r)} n_k^{(q)*} e^{-i\frac{\omega_0}{V_0}(q_p - q_q^*)a_2} dv$$

soit en intégrant comme pour I_1 :

$$I_2 = -i \left(\frac{\omega_0}{V_0}\right)^2 \lambda^2 \frac{V_0}{\omega_0} \overline{\mathcal{H}_{ikjm}} \sum_{p,q} \frac{A_p \circ u_j^{\circ}(p) A_q^* \circ u_i^{\circ}(q)^* n_m^{(r)} n_k^{(q)*}}{q_p - q_q^*}$$

ce qui conduit à la relation (II-70).

$\mathcal{H}_{ikjm}$ dépend de la variable d'espace a_2

$\mathcal{H}_{ikjm}$ se met sous la forme : $\mathcal{H}_{ikjm} = \sum_n \bar{\alpha}_{ikjm}^{(n)} a_2^n$ avec :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{ikjm}^{(n)} = & \delta_{ij} \bar{\tau}_{km}^{(n)} + C_{ikjmu\nu} \bar{S}_{uv}^{(n)} + C_{pkjm} \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i^{(n)}}{\partial a_p} + \delta_{2p}^{(n+1)} \bar{u}_i^{(n+1)} \right\} \\ & + C_{ikqm} \left\{ \frac{\partial \bar{u}_j^{(n)}}{\partial a_q} + \delta_{2q}^{(n+1)} \bar{u}_j^{(n+1)} \right\} \end{aligned}$$

où $\bar{\tau}_{km}^{(n)}$, $\bar{S}_{uv}^{(n)}$ et $\frac{\partial \bar{u}_i^{(n)}}{\partial a_p}$ sont respectivement les expressions à l'ordre n

du développement en a_2 des efforts, déformations et gradients des déplacements de la précontrainte.

L'intégrale I_2 devient :

$$I_2 = \lambda^2 \left(\frac{\omega_0}{V_0}\right)^2 \sum_n \bar{\alpha}_{ikjm}^{(n)} \sum_{p,q} A_p^{(p)} u_j^{(p)} A_q^{*(q)} u_i^{*(q)} n_m^{(p)} n_k^{(q)*} \int_0^\infty a_2^n e^{-i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*) a_2} da_2$$

Quel que soit l'ordre n , si le terme $\frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*)$ reste positif, ce qui se vérifie numériquement facilement, il vient :

$$\int_0^\infty a_2^n e^{-ka_2} da_2 = \frac{1}{k} \left(\frac{n!}{k^n}\right) \quad k = \frac{i\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*)$$

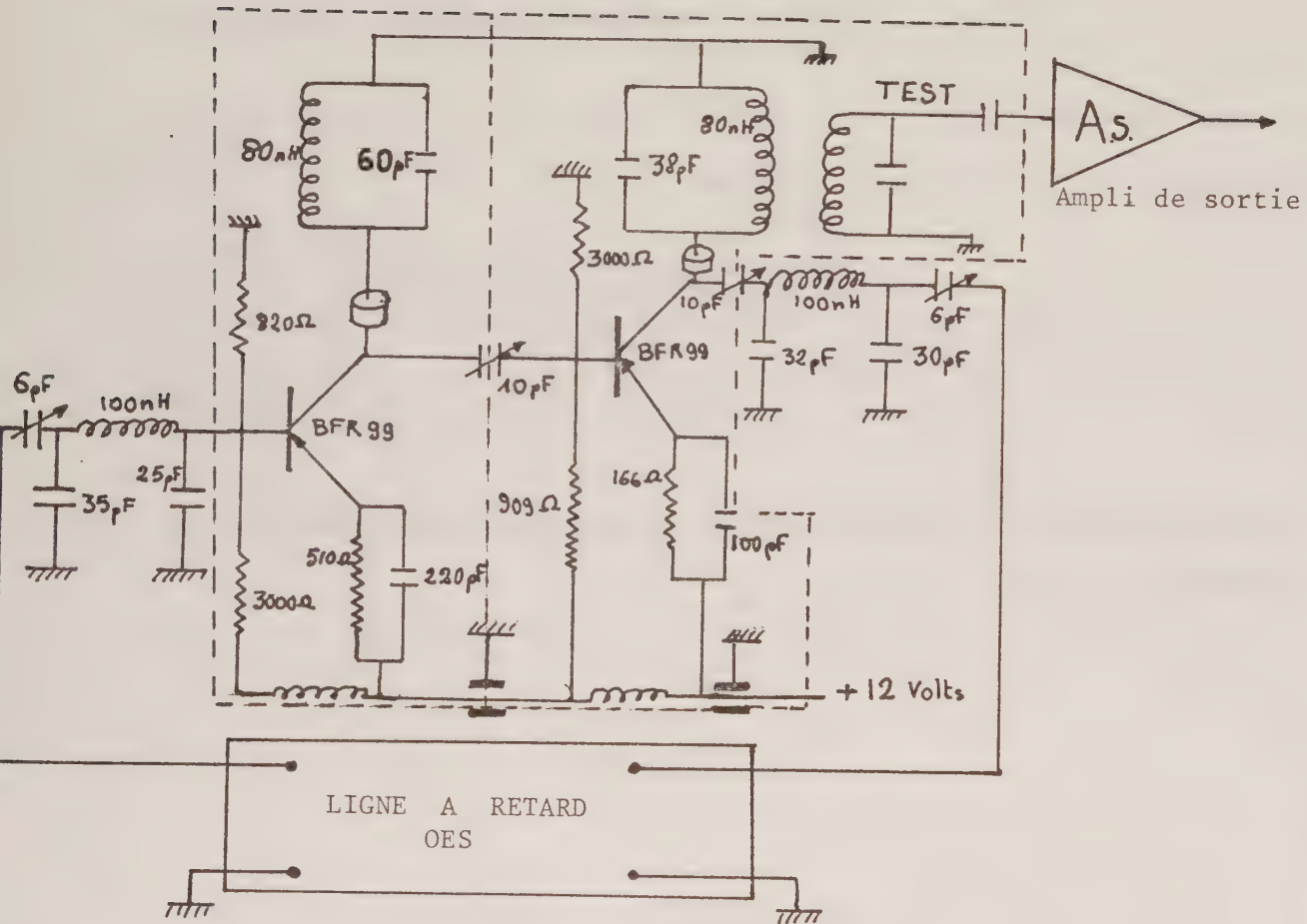
L'intégrale I_2 s'écrit sous la forme :

$$I_2 = -i\lambda^2 \left(\frac{\omega_0}{V_0}\right)^2 \frac{V_0}{\omega_0} \sum_n \bar{\alpha}_{ikjm}^{(n)} \sum_{p,q} \frac{A_p^{(p)} u_j^{(p)} A_q^{*(q)} u_i^{*(q)} n_m^{(p)} n_k^{(q)*}}{q_p - q_q^*} \frac{n!}{\left(i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*)\right)^n}$$

ce qui conduit à la relation (II-77) donnant la variation relative de fréquence.

ANNEXE 3

OSCILLATEUR A LIGNE OES



Fréquence d'oscillation 100 MHz

Transistor BFR 99

FT : 2 GHz

N.F. : 2 dB à 100 MHz

ANNEXE 4

CONSTANTES DU SILICIUM

(valeurs mesurées à 25°C) (44), (45)

-o0o-

Masse spécifique :

$$\rho_0 = 2,33 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Coefficients élastiques du second ordre :

$$C_{11} = 1,657 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$C_{12} = 0,639 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$C_{44} = 0,796 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Coefficients de température du premier ordre :

$$\alpha_{C_{11}}^{(1)} = - 69,5 \text{ ppm/}^\circ\text{C}$$

$$\alpha_{C_{12}}^{(1)} = - 96,5 \text{ ppm/}^\circ\text{C}$$

$$\alpha_{C_{44}}^{(1)} = - 44,9 \text{ ppm/}^\circ\text{C}$$

coefficient de dilatation linéaire :

$$\alpha^{(1)} = 2,3 \text{ ppm/}^\circ\text{C}$$

Coefficients de température du deuxième ordre :

$$\alpha_{C_{11}}^{(2)} = - 96 \cdot 10^{-9} / ^\circ\text{C}^2$$

$$\alpha_{C_{12}}^{(2)} = - 45 \cdot 10^{-9} / ^\circ\text{C}^2$$

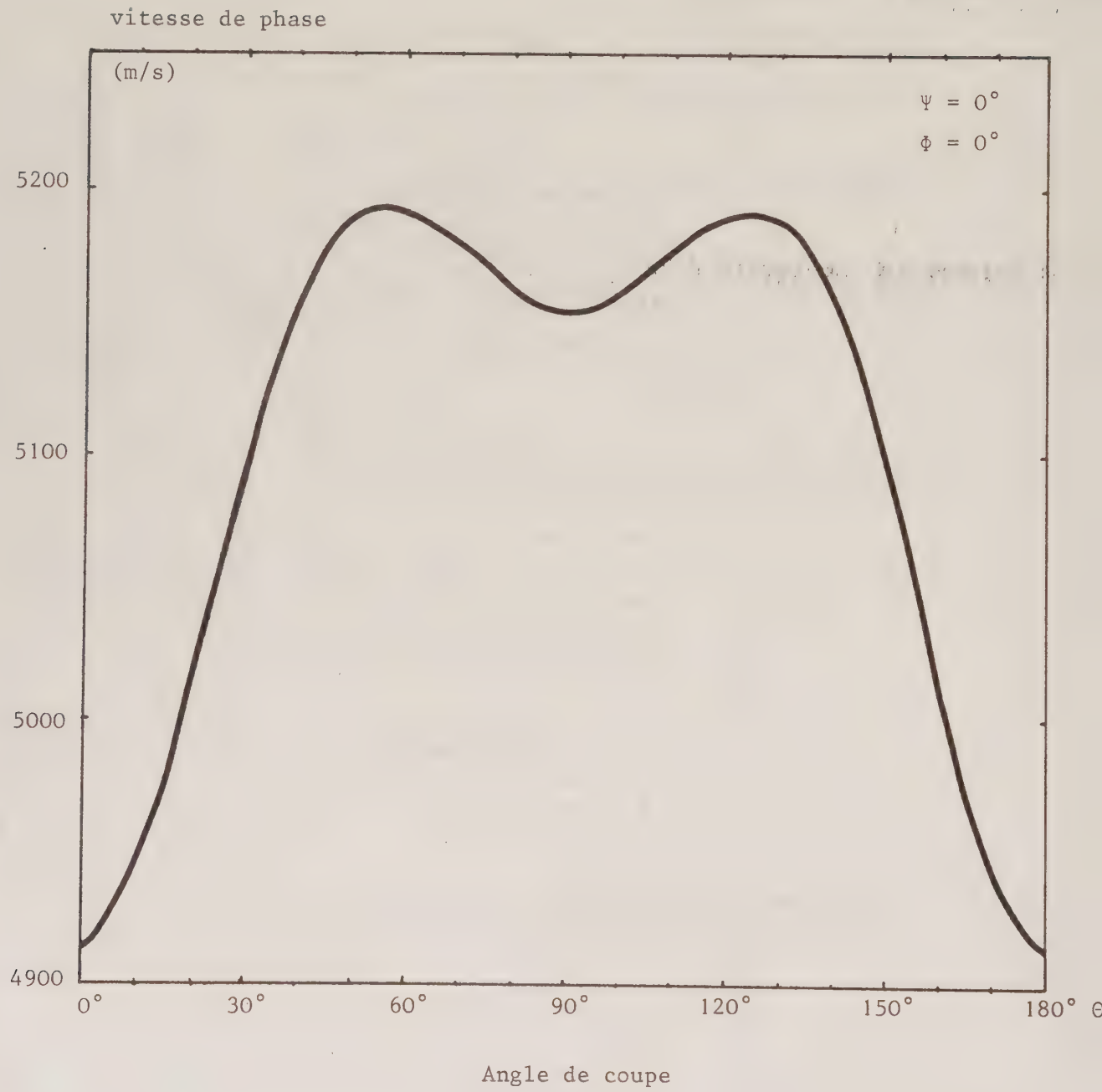
$$\alpha_{C_{44}}^{(2)} = - 51 \cdot 10^{-9} / ^\circ\text{C}^2$$

coefficient de dilatation :

$$\alpha^{(2)} = 4 \cdot 10^{-9} / ^\circ\text{C}^2$$

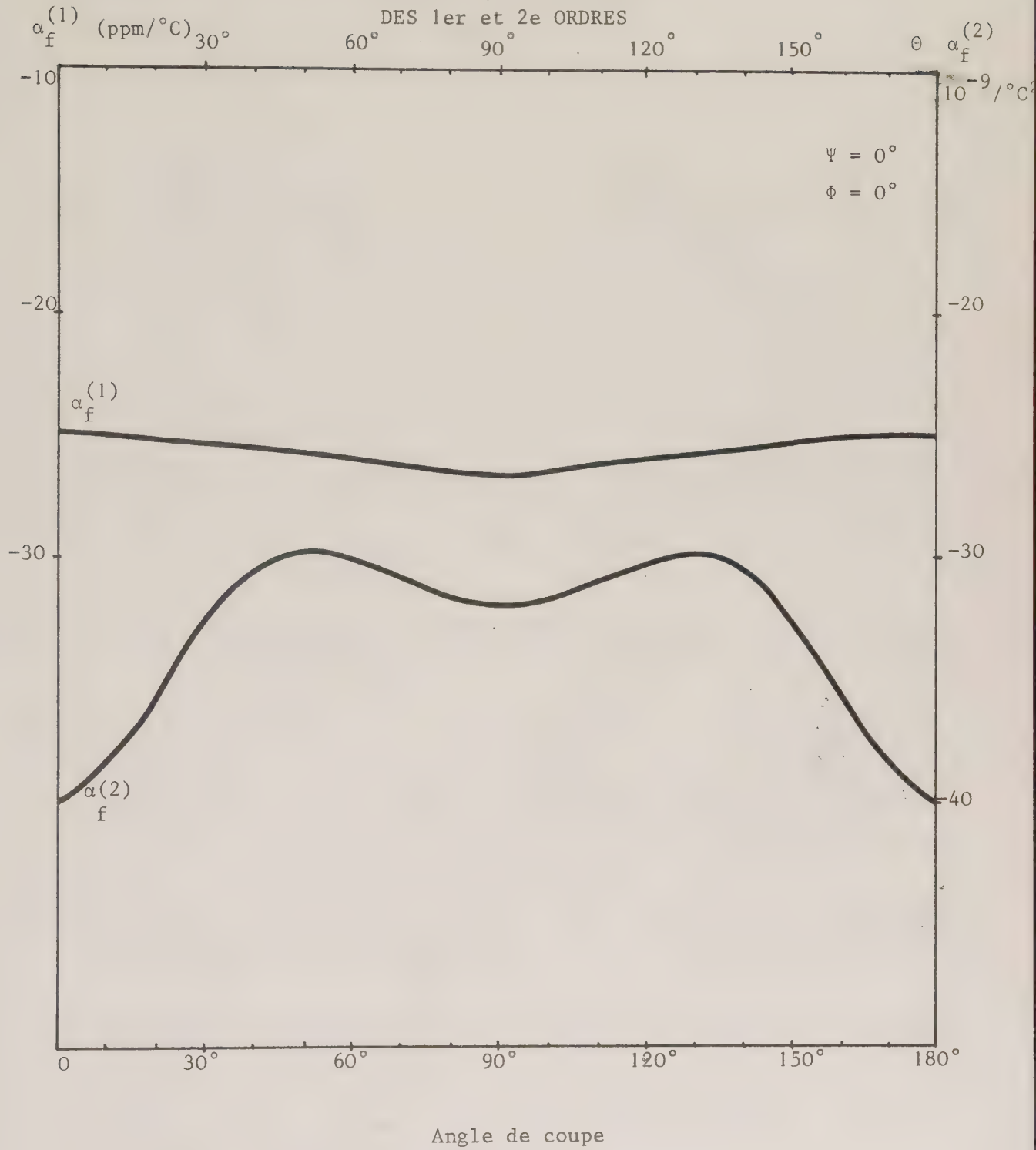
SILICIUM

VITESSES DE PHASE



SILICIUM

COEFFICIENTS DE TEMPERATURE



R É F É R E N C E S

-oOo-

- (1) - LORD RAYLEIGH, "On waves propagated along the plane surface of an elastic solid", Proc. London Math. Soc., 17, 4-11, 1885.
- (2) - R.M. WHITE, "Surface elastic waves", Proceedings of the IEEE, vol. 58, n° 8, 1238-1276, 1970.
- (3) - E. DIEULESAINT, D. ROYER, "Ondes élastiques dans les solides", Edition Masson et Cie.
- (4) - I.A. VIKTOROV, "Rayleigh and Lamb waves", Plenum Press, New York, 1967.
- (5) - B.A. AULD, "Acoustic fields and waves in solids", Wiley Interscience, vol. I et II, 1973.
- (6) - B.A. AULD, J.J. GAGNEPAIN, M. TAN, "Horizontal shear surface waves on corrugated surfaces", Electronics Letters, vol. 12, n° 24, 650, Nov. 1976.
- (7) - W.G. CADY, "Piezoelectricity", Dover Publications, Inc. New York, 1964.
- (8) - A.J. SLOBODNIK Jr., E.D. CONWAY, R.T. DELMONICO, "Microwave Acoustics Handbook", vol. 1A, Surface wave velocities, 1973.
vol. 2A, The temperature coefficients of acoustic surface wave velocity, 1974.
- (9) - T.L. SZABO, A.J. SLOBODNIK Jr., "The effect of diffraction on the design of acoustic surface wave devices", IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, vol. SU-20, n° 3, July 1973.
- (10) - M. FELDMANN et J. HENAFF, "Propagation des ondes élastiques de surface", Revue de Physique appliquée, tome 12, 1775, Nov. 1977.
- (11) - W.P. MASON, "Electromechanical transducers and wave filters", 201-399, Princeton, N.J. Van Nostrand, 1948.
- (12) - SMITH, GERARD, COLLINS, REEDER, SHAW, "Analysis of interdigital surface wave transducers by use of an equivalent circuit model", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. 17, n° 11, Nov. 1969.

- (13) - R.N. THURSTON, "Wave propagation in fluids and normal solids", Physical Acoustics, vol. 1A, Academic Press, New York, 1964.
- (14) - J.P. PERDIGUES, "Etude de l'influence des forces sur la fréquence d'un résonateur à quartz", Thèse, 1975, Besançon.
- (15) - J.J. GAGNEPAIN, J.P. PERDIGUES, A. DEVAL, "Utilisation de capteurs à quartz pour la mesure de grandeurs thermiques et mécaniques", Colloque International sur l'électronique et la mesure, Paris, Mai 1975.
- (16) - G. THEOBALD, J.J. GAGNEPAIN, "Propagation d'une onde élastique dans un milieu anisotrope perturbé", Revue du Cethedec, n° 55, 1978.
- (17) - H.F. TIERSTEN, J.C. BAUMHAUER, "Non linear electroelastic equations for small fields superposed on a bias", J. Acoust. Soc. Am., 54, 1017, 1973.
- (18) - H.F. TIERSTEN, "On the nonlinear equations of thermoelastic elasticity", Inst. J. Engng. Sci., 9, 587, 1971.
- (19) - H.F. TIERSTEN, B.K. SINHA, "A perturbation analysis of the attenuation and dispersion of surface waves", J. Appl. Phys., 49, Jan. 1978.
- (20) - H.F. TIERSTEN, "Linear piezoelectric plate vibrations", Plenum Press, New York, 1969.
- (21) - R.D. MINDLIN, "An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates", Monograph USASCEL Fort Monmouth, N.J., 1955.
- (22) - M.B. SCHULZ, B.J. MATSINGER, M.G. HOLLAND, "Temperature dependence of surface acoustic waves velocity on α quartz", J. Appl. Phys. 41, 2756, 1970.
- (23) - J.F. DIAS, H.E. KARRER, J.A. KUSTERS, J.H. MATSINGER, M.B. SCHULZ, "The temperature coefficients of delay time for X-propagating acoustic surface waves on rotated Y cuts of α quartz", IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, vol. SU-22, n° 1, Jan. 1977.
- (24) - M. MICHEL, "Etude des propriétés thermiques des lignes à retard à ondes de surface", Thèse, 1977, Besançon.
- (25) - D. HAUDEN, M. MICHEL, G. BARDECHE, J.J. GAGNEPAIN, "Temperature effects on quartz crystal surface wave oscillators", Appl. Phys. Letters, vol. 31, n° 5, Sept. 1977.
- (26) - D. HAUDEN, M. MICHEL, J.J. GAGNEPAIN, "S.A.W. Temperature coefficients of higher order", SAW meeting, Colchester, Sept. 1977.
- (27) - D. HAUDEN, M. MICHEL, J.J. GAGNEPAIN, "Higher order temperature coefficients of quartz S.A.W. oscillators", Proceedings of 32nd annual Symposium on frequency control, May 1978.

- (28) - S. TIMOSHENKO, "Théorie de l'élasticité", Librairie polytechnique
Ch. Beranger, 1948.
- (29) - T.M. REEDER, D.E. CULLEN, M. GILDEN, "S.A.W. oscillator pressure sensors",
Ultrasonics Symposium Proceedings IEEE, cat. 75, CH0994-4SU, 1975.
- (30) - A. BALLATO, J.R. VIG, "Static and dynamic frequency-temperature behavior
of singly and doubly rotated over-controlled quartz resonators",
Proceedings of 32nd annual frequency control symposium, may 1978.
- (31) - P.C.Y. LEE, KUANG-MING-WU, "Effects of acceleration on the resonator fre-
quencies of crystal plates", Proceedings of 30th annual symposium
on frequency control, May 1976.
- (32) - M. VALDOIS, "Etude de l'influence d'accéléérations sur les propriétés des
résonateurs à quartz", Thèse, 1974, Besançon.
- (33) - D. JANIAUD, "Modélisation de l'influence d'une accélération sur la fré-
quence des résonateurs à quartz", Thèse, 1978, Besançon.
- (34) - P. LESVEQUES, "Acceleration dependence of the surface acoustic wave oscil-
lator frequency", Ultrasonics Symposium Proceedings, 1977.
- (35) - J.J. CAMPBELL, W.R. JONES, "A method for estimating optimal crystal cuts
and propagation direction for excitation of piezoelectric surface
waves", IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, vol. SU-15, n° 4,
Oct. 1978.
- (36) - K.A. INGEBRIGSTEN, "Surface waves in piezoelectrics", J. Appl. Phys.,
vol. 40, n° 7, June 1969.
- (37) - G.A. COQUIN, H.F. TIERSTEN, "Analysis of the excitation and detection of
piezoelectric surface waves in quartz by means of surface electro-
des", J. of Acoustical Society of America, vol. 41, Au. 1967.
- (38) - D. HAUDEN, J.J. GAGNEPAIN, "Capteurs à ondes de surface", Techniques de
l'Ingénieur R 4019, Juil. 1978.
- (39) - D. HAUDEN, "Oscillateurs à ondes de surface", Séminaire sur les étalons
de fréquence, leur caractérisation et leur utilisation, Av. 1979.
- (40) - J.J. GAGNEPAIN, "Capteurs à ondes de surface et de volume", Séminaire
sur les étalons de fréquence, leur caractérisation et leur utili-
sation, Av. 1979.
- (41) - R. BESSON, J.J. GAGNEPAIN, D. JANIAUD, M. VALDOIS, "Design of bulk wave
quartz resonators insensitive to accelerations", Proceedings of
33rd annual frequency control symposium, N.J., May 1979.
- (42) - R. BECHMANN, "Elastic and piezoelectric constants of α -quartz", Physical
Review, 110, 1958.

- (43) - R. BECHMANN, A.D. BALLATO, T.J. LUKASEK, USAELRDL Technical Report 2261, Fort Monmouth, N.J., 1963.
- (44) - EZZ-EL-ARAB, B. VODAR, "Constantes élastiques du silicium entre 25°K et 300°K, C.R. Acad. Sc., Janv. 1968.
- (45) - H.J. MACSKIMIN, "Measurement of elastic constants at low temperature", J. Appl. Phys., vol. 24, n° 8, Aug. 1953.

LIVRES TRAITANT DU SUJET

"ONDES ELASTIQUES DANS LES SOLIDES", E. Dieulesaint, D. Royer, 1974
Edition Masson et Cie, Paris.

"ACOUSTIC FIELDS AND WAVES IN SOLIDS", B.A. Auld, vol. I et II, 1973
Wiley Interscience, N.Y.

"PIEZOELECTRICITY", W.G. Cady, 1964
Dover Publications Inc. N.Y.

"RAYLEIGH AND LAMB WAVES", I.A. Viktorov, 1967
Plenum Press, N.Y.

"THEORY OF ELASTIC WAVES IN CRYSTALS", F.I. Fedorov, 1968
Plenum Press, N.Y.

"PROPRIETES PHYSIQUES DES CRISTAUX, J.F. Nye, 1961
Dunod, Paris

"LINEAR PIEZOELECTRIC PLATE VIBRATIONS", H.F. Tiersten, 1969
Plenum Press, N.Y.

"WAVE PROPAGATION IN FLUIDS AND NORMAL SOLIDS", R.N. Thurston, 1964
Physical Acoustics vol. 1A, Academic Press, N.Y.

"THEORIE DE L'ELASTICITE", S. Timoshenko, 1948
Librairie Polytechnique Ch. Beranger, Paris.

"THEORY OF PLATES AND SHELLS", S. Timoshenko, 1959
International Student Edition, Tokyo.

"A TREATISE ON THE MATHEMATICAL THOERY OF ELASTICITY", A.E.H. Love, 1944
Dover Publications Inc., N.Y.

Vu et permis d'imprimer
Besançon, le

Pour le Président de l'Université
Le Doyen de la Faculté des Sciences et des Techniques,

L. GALATRY

